ALGEBRA I **Ejercicios resueltos en clase.** CURSO 2014/15

NOMBRE, APELLIDOS Y DNI:

INSTRUCCIONES: Entregar UNICAMENTE esta hoja. IMPORTANTE: Se prohibe el uso de calculadoras, libros, apuntes, teléfonos moviles, etcetera. Las respuestas deben justificarse adecuadamente. Incluir todos los pasos. Simplificar todo lo posible. SUGERENCIA: Mirar las dos caras de esta hoja. INFORMACION: Cada problema vale 5 puntos.

**I)** El vector $v$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ tiene coordenadas $(1, 2)$ respecto de la base $B = \{v_1, v_2\}$. Hallar las coordenadas de $v$ en la base $B' = \{u_1, u_2\}$ en $\mathbb{R}^2$, sabiendo que $v_1 = 3u_1 + 2u_2$, y $v_2 = 4u_1 - u_2$.

$$v = v_1 + 2v_2 = 3u_1 + 2u_2 + 2(4u_1 - u_2) = 11u_1$$

Luego $v = (11, 0)_{B'}$

**II)** Sean $z = (z_1, z_2)$ y $w = (w_1, w_2)$ vectores en $\mathbb{C}^2$. Sabiendo que el producto $(z, w)_1 := z_1\overline{w}_1 + (1+i)z_1\overline{w}_2 + (1-i)z_2\overline{w}_1 + 3z_2\overline{w}_2$ es hermítico, calcular la norma de $(1-i, 2+3i)^T$ definida mediante $(\cdot,\cdot)_1$.

$$\|(1-i, 2+3i)^T\|^2 = \langle (1-i, 2+3i)^T, (1-i, 2+3i)^T \rangle$$

$$= (1-i)\overline{(1-i)} + (1+i)(1-i)\overline{(2+3i)} + (1-i)(2+3i)\overline{(1-i)}$$

$$+ 3(2+3i)\overline{(2+3i)} = 2 + 2\cdot 2 + 2\cdot 2 + 3(4+9)$$

$= 49$, luego $\|(1-i, 2+3i)^T\| = 7.$

**III)** Ortogonalizar el conjunto de vectores $\{u_1 = (1, 2, -2)^T, u_2 = (1, -1, 4)^T, u_3 = (2, 1, 1)^T\}$ con respecto al producto escalar estándar en $\mathbb{R}^3$, usando el aglorítmo de Gram-Schmidt.

Hallamos $\{v_1, v_2, v_3\}$ con $\text{Span}\{v_1\} = \text{Span}\{u_1\}$, $\text{Span}\{v_1, v_2\} = \text{Span}\{u_1, u_2\}$ y $\text{Span}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{Span}\{u_1, u_2, u_3\}$, tales que $v_1 \perp v_2$, $v_1 \perp v_3$, $v_2 \perp v_3$.

$$\boxed{v_1 = u_1 = (1, 2, -2)^T}$$

$$\boxed{v_2 =} u_2 - P_{\text{Span}\{v_1\}}(u_2) = (1, -1, 4)^T - \frac{\langle (1,-1,4)^T, (1,2,-2)^T \rangle}{\langle (1,2,-2)^T, (1,2,-2)^T \rangle} v_1$$

$$= (1, -1, 4)^T - \frac{(-9)}{9}(1, 2, -2)^T = \boxed{(2, 1, 2)^T}$$

$$P_{\text{Span}\{v_1, v_2\}}(u_3) = \frac{\langle (2,1,1)^T, (1,2,-2)^T \rangle}{9}(1,2,-2)^T$$

$$+ \frac{\langle (2,1,1)^T, (2,1,2)^T \rangle}{\langle (2,1,2)^T, (2,1,2)^T \rangle}(2,1,2)^T = \frac{2}{9}(1, 2, -2)^T$$

$$+ \frac{7}{9}(2,1,2)^T = \frac{1}{9}(16, 11, 10)$$

$$v_3 = u_3 - \frac{1}{9}(16, 11, 10) = \frac{1}{9}(2, -2, -1)$$

Comentario: También podemos tomar $\boxed{v_3 = (2, -2, -1)}$; es más sencillo y sigue siendo $\perp$ a $v_1$ y a $v_2$.