ALGEBRA I **Ejercicios resueltos en clase.** CURSO 2014/15

NOMBRE, APELLIDOS Y DNI:

INSTRUCCIONES: Entregar UNICAMENTE esta hoja. IMPORTANTE: Se prohibe el uso de calculadoras, libros, apuntes, teléfonos moviles, etcetera. Las respuestas deben justificarse adecuadamente. Incluir todos los pasos. Simplificar todo lo posible. SUGERENCIA: Mirar las dos caras de esta hoja. INFORMACION: Cada problema vale 5 puntos.

I) Usando $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, donde x es un número real, demostrar que $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ y $\operatorname{sen} x = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$.

$$e^{ix} + e^{-ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x + \cos(-x) + i \operatorname{sen}(-x)$$
$$= \cos x + i \operatorname{sen} x + \cos x - i \operatorname{sen} x = 2\cos x$$

luego $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$

$$e^{ix} - e^{-ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x - \cos(-x) - i \operatorname{sen}(-x)$$
$= 2i \operatorname{sen} x$, luego $\operatorname{sen} x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

II) Resolver $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 2$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 3 + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i$$

III) Resolver el sistema $(i+1)z+(2-i)w=-3i$, $(2i+1)z+(3+i)w=2+2i$.

$$(2i+1)(i+1)z+(1+2i)(2-i)w=(1+2i)(-3i)$$
$$(1+i)(1+2i)z+(1+i)(3+i)w=(1+i)(2+2i)$$

Restando:

$$[(1+2i)(2-i)-(1+i)(3+i)]w=(1+2i)(-3i)-(1+i)(2+2i)$$

Simplificando:

$$[4+3i-2-4i]w=6-3i-2i=6-7i$$

$$[2-i][2+i]w=5w=(2+i)(6-7i)=19-8i$$

$$\boxed{w=\frac{1}{5}(19-8i)}$$

$$2z=(1+i)(1-i)z=(1-i)\left[-3i-(2-i)\frac{1}{5}(19-8i)\right]$$
$$=(1-i)\left(-\frac{15i}{5}-\frac{1}{5}(30-35i)\right)=(1-i)(-6+4i)$$
$$=-2+10i$$

$$\boxed{z=-1+5i}$$

ALGEBRA I **Ejercicios resueltos en clase.** CURSO 2014/15

NOMBRE, APELLIDOS Y DNI:

INSTRUCCIONES: Entregar UNICAMENTE esta hoja. IMPORTANTE: Se prohibe el uso de calculadoras, libros, apuntes, teléfonos moviles, etcetera. Las respuestas deben justificarse adecuadamente. Incluir todos los pasos. Simplificar todo lo posible. SUGERENCIA: Mirar las dos caras de esta hoja. INFORMACION: Cada problema vale 5 puntos.

I) Usar la fórmula de De Moivre para deducir la fórmula del coseno del ángulo triple.

$\cos 3\alpha + i \operatorname{sen} 3\alpha = (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^3 = \cos^3\alpha + 3\cos^2\alpha\, i \operatorname{sen}\alpha - 3\cos\alpha \operatorname{sen}^2\alpha + i^3 \operatorname{sen}^3\alpha$. Igualando partes reales,

$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha \operatorname{sen}^2\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)$

$= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

II) Hallar $\cos(\pi/12)$ calculando la raíz de $e^{i\pi/6}$. $\cos\frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}} = a + ib$

$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = a^2 - b^2 + 2abi \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = a^2 - b^2, \; 2ab = \frac{1}{2}$

$a = \frac{1}{4b}, \; \left(\frac{1}{4b}\right)^2 - b^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \; \frac{1}{16} = b^4 + \frac{\sqrt{3}}{2} b^2, \; b^2 = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}}}{2}$

$b^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}, \; a = \frac{1}{4\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}} = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}}$

III) Resolver la ecuación $x^4 - 2x^2 + 10 = 0$ en el cuerpo de los números complejos.

$$y = x^2 \,, \quad y^2 - 2y + 10 = 0 \,, \quad y = \frac{2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = 1 \pm 3i$$

$$(a+ib)^2 = 1+3i \,, \quad a^2 - b^2 = 1 \,, \quad 2aib = 3i$$

$$a = \frac{3}{2b} \,, \quad \frac{9}{4b^2} - b^2 = 1 \,, \quad b^4 + b^2 - \frac{9}{4} = 0 \,, \quad b^2 = \frac{-1+\sqrt{1+9}}{2}$$

$$b = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{10}-1}{2}} \,, \quad a = \pm\frac{3}{2\sqrt{\frac{\sqrt{10}-1}{2}}} = \pm\frac{3}{\sqrt{2\sqrt{10}-2}}$$

$$x_1 = \frac{3}{\sqrt{2\sqrt{10}-2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{10}-1}{2}} \,, \quad x_2 = -x_1$$

$$(a+ib)^2 = 1-3i \,, \quad a^2 - b^2 = 1 \,, \quad a = -\frac{3}{2b} \,,$$

$$b = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{10}-1}{2}} \,, \quad a = \mp\frac{3}{\sqrt{2\sqrt{10}-2}}$$

$$x_3 = \frac{3}{\sqrt{2\sqrt{10}-2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{10}-1}{2}} \,, \quad x_4 = -x_3$$