ÁLGEBRA I DE FÍSICOS **Examen Final, Convocatoria Ordinaria** CURSO 2014/15

I) 1) Ninguna aplicación lineal $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^5$ es inyectiva. V F Si $T: \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^5$ fuese inyectiva, $Te_1, \dots, Te_6$ serían 6 vectores lin. indep. en $\mathbb{R}^5$

2) Si L es un subespacio vectorial de un espacio vectorial W y w es un vector en W, entonces el conjunto $w + L = \{w + \ell : \ell \in L\}$ es también un subespacio vectorial de W. V F Si $w \neq 0$, $0 \notin w + L$

3) Existen subespacios vectoriales K, L de $\mathbb{C}^{10}$ tales que $\dim K = \dim L = 3$ y $\dim(K + L) = 9$. V F $\dim(K+L) \leq \dim K + \dim L = 6$

4) Si $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ es lineal e inyectiva, entonces T es sobreyectiva. V F Si T es injectiva, $\{Te_1, \dots, Te_6\}$ es una base

5) Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ es definida positiva si y sólo si $a > |b|$. V F

Por Sylvester

6) Si una matriz ampliada puesta en forma escalonada tiene menos pivotes que filas, entonces el sistema de ecuaciones del que procede la matriz ampliada tiene infinitas soluciones. V F

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

7) Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. El espacio vectorial $\mathbb{K}^2$ se convierte en un cuerpo si definimos la multiplicación de la siguiente forma: $(k_1, k_2) \cdot (\ell_1, \ell_2) = (k_1\ell_1, k_2\ell_2)$ para todos $(k_1, l_2), (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{K}^2$. V F

$(1,0) \neq (0,0)$ pero $(1,0)$ no tiene inverso multiplicativo

8) Suponemos que el producto de matrices AB está bien definido. Si $ran(A) = ran(AB)$, entonces $ran(A) = ran(B)$. V F $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

9) Las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ representan la misma aplicación lineal con respecto a bases distintas. V F

$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

10) Si la matriz A es simétrica, entonces es invertible. V F Considerar cualquier matriz simétrica con $\det = 0$. Ej: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

II) a) (5 puntos) Definimos una forma bilineal en $\mathbb{R}^3$ mediante $(x, y)_A := x^T A y$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Decidir razonadamente si $(x, y)_A$ es un producto escalar (no hace falta comprobar la bilinealidad, puesto que ésta se afirma en el enunciado).

b) (10 puntos) Usar el Algoritmo de Gram-Schmidt para ortogonalizar los vectores columna de A.

c) (5 puntos en total).

i) (1 punto) Enunciar el Teorema de Pitágoras en términos de vectores y sus normas.

ii) (1 punto) Dados dos vectores x e y distintos de 0, escribir la fórmula para la proyección ortogonal $P_{Span\{y\}}(x)$ de x sobre $Span\{y\}$, donde $Span\{y\}$ es el espacio generado por el vector y.

iii) (1 punto) Usar los apartados anteriores para probar que $\|P_{Span\{y\}}(x)\| \leq \|x\|$.

iv) (2 puntos) Usar los apartados anteriores para probar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

iv) (2 puntos) Usar los apartados anteriores para probar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

a) Puesto que $A = A^T$,

$$\langle u, v\rangle_A = u^T A v = (u^T A v)^T$$

$$= v^T A^T u = v^T A u = \langle v, u\rangle_A .$$

$\det[1] = 1 > 0$, $\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 1 > 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0,$$ luego

por el criterio de Sylvester, A es definida positiva (alternativamente, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ se ha obtenido a partir de A sin intercambiar filas; como todos los pivotes son positivos, A es definida positiva).
Por tanto, $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ es un producto escalar: la forma es bilineal, simétrica y definida positiva.

b) $u_1 = (1,1,0)$

$$u_2 = (1,2,1) - P_{\operatorname{Span} u_1}((1,2,1)) = (1,2,1) - \frac{\langle (1,1,0),(1,2,1)\rangle}{\langle (1,1,0),(1,1,0)\rangle}(1,1,0)$$

$$= (1,2,1) - \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$u_3 = (0,1,3) - P_{\operatorname{Span} u_1}((0,1,3)) - P_{\operatorname{Span} u_2}((0,1,3))$$

$$= (0,1,3) - \frac{\langle (1,1,0),(0,1,3)\rangle}{2}(1,1,0)$$

$$- \frac{\langle (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1),(0,1,3)\rangle}{3/2}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$v_3 = (0,1,3) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) - \left(-\frac{7}{6}, +\frac{7}{6}, \frac{7}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

c) ii) $P_{\text{Span}(y)}\, x = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\, y$

i) Sea V un e.v. con producto escalar o hermítico $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si $\langle u, v\rangle = 0$, entonces $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$, donde $\|w\|^2 = \langle w, w\rangle$.

iii) Como $P_{\text{Span}(y)}(x) \perp x - P_{\text{Span}(y)}(x)$

Pitágoras

$$\|x\|^2 = \|P_{\text{Span}(y)}(x)\|^2 + \|x - P_{\text{Span}(y)}(x)\|^2$$

$$\geq \|P_{\text{Span}(y)}(x)\|^2, \text{ luego}$$

$$\|P_{\text{Span}(y)}(x)\| \leq \|x\|.$$

d) Por los apartados anteriores

$$\|x\| \geq \|P_{\text{Span}(y)}(x)\| = \left\|\frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y\right\|$$

$$= \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|y\|^2}\|y\| = \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|y\|}, \text{ luego}$$

$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ cuando $y \neq 0$.

Si $y=0$, entonces ambos lados de la desigualdad $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ son 0, luego el resultado también es cierto en este caso

III) a) (10 puntos) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rrrrcr} 2x & +8y & -z & +w & = & 0 \\ 4x & +16y & -3z & -w & = & -10 \\ -2x & +4y & -z & +3w & = & -6 \end{array}\right\},$$

expresar dicho sistema sistema en forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, y calcular sus soluciones o justificar que no las tiene.

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & -1 & 1 \\ 4 & 16 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 8 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 3 & -6 \\ 4 & 16 & -3 & -1 & -10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 8 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & -2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -10 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 8 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right], \quad w \in \mathbb{R} \text{ arbitrario}$$

$$\boxed{z = 10 - 3w}, \quad 6y = -3 + z - 2w = 7 - 5w$$

$$\boxed{y = \frac{7}{6} - \frac{5}{6}w} \quad 2x = -8y + z - w =$$

$$= -\frac{28}{3} + \frac{20}{3}w + 10 - 4w$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{8}{3}w, \quad \boxed{x = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}w}$$

b) (10 puntos) Hallar una base para $Ker(A)$, el núcleo de A, así como su descripción mediante ecuaciones cartesianas.

Las soluciones son las de antes, salvo que los términos constantes valen 0 (estamos en el caso homogeneo), luego $w \in \mathbb{R}$ es arbitrario, $x = \frac{4}{3}w$, $y = -\frac{5}{6}w$, $z = -3w$. Eliminando denominadores, concluimos que $v \in Ker\, A \iff v = w(8,-5,-18,6)$, luego $\{(8,-5,-18,6)\}$ es una base.

Ecuaciones:
$$\left(\begin{array}{c|c} 8 & x \\ -5 & y \\ -18 & z \\ 6 & w \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} 1 & \frac{x}{8} \\ 0 & y + \frac{5x}{8} \\ 0 & z + \frac{9x}{4} \\ 0 & w - \frac{3x}{4} \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 8y = 0 \\ 9x + 4z = 0 \\ -3x + 4w = 0 \end{array}\right\}$$

IV) Sea $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definida mediante $T(x, y) = (x + 2y, -x + 3y)$.

a) (5 puntos) Hallar la matriz A que representa a T con respecto a la base canónica. Decidir razonadamente si T es invertible.

$$B_c = \{e_1, e_2\} = \{(1,0), (0,1)\}.$$

$$[T]_{B_c B_c} = A = \begin{bmatrix} Te_1 & Te_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(1,0) & T(0,1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

b) (5 puntos) Resolver en sobre los números complejos la ecuación $\det\left(A - \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}\right) = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1-z & 2 \\ -1 & 3-z \end{vmatrix} = (1-z)(3-z) + 2 = 3 + z^2 - 4z + 2$$

$$= z^2 - 4z + 5 = 0$$

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i$$

c) (10 puntos) Decidir razonadamente si $B = \{(1-i,1)^T, (1+i,1)^T\}$ es una base de $\mathbb{C}^2$, y en caso de respuesta afirmativa, hallar la matriz que representa a T con respecto a esa base.

B es una base puesto que tenemos 2 vectores linealmente independientes en $\mathbb{C}^2$. Para ver que son linealmente independientes, podemos formar una matriz con ellos, y hallar el determinante ($\neq 0$), o más directamente, invertimos la matriz

$$[I]_{B_c B} = \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1-i & 1+i & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 2i & 1+i & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & i & \frac{1}{2}(1+i) & 0 \\ 0 & 1-i & -\frac{1}{2}(1+i) & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & i & \frac{1}{2}(1+i) & 0 \\ 0 & 2 & -i & 1+i \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{array}\right]$$

Luego $[I]_{B B_c} = \begin{bmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix}$

y las columnas son vectores linealmente independientes.

$$[T]_{BB} = [I]_{BB_c} [T]_{B_cB_c} [I]_{B_cB}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i & 1-i \\ -i & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3-i & 3+i \\ 2+i & 2-i \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4+2i & 0 \\ 0 & 4-2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{bmatrix}$$

Observación: $2 \pm i$ son las raíces de $|A - zI|$ halladas en b)