

ÁLGEBRA I. HOJA 7

1) Sea S una forma trilineal alternada distinta de 0, y sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de \mathbb{K}^3 . Dados $u_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3$, $u_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3$, y $u_3 = a_{13}v_1 + a_{23}v_2 + a_{33}v_3$, escribir $S(u_1, u_2, u_3) = c S(v_1, v_2, v_3)$, hallando c de forma explícita.

2) Escribir la matriz de un giro (rotación):

a) de noventa grados en sentido positivo (contrario al de las agujas del reloj), alrededor del origen en \mathbb{R}^2 .

b) de ángulo α en sentido negativo alrededor del origen en \mathbb{R}^2 .

3) Escribir la matriz de la simetría (reflexión) de \mathbb{R}^3 respecto a:

a) El plano de ecuación $y = x$.

b) El plano de ecuación $y = z$.

c) El plano de ecuación $x = z$.

d) La recta de ecuaciones $y = x, z = 0$.

e) La recta de ecuaciones $y = z, x = 0$.

f) La recta de ecuaciones $x = z, y = 0$.

Determinar los correspondientes núcleos e imágenes.

4) Escribir las matrices de las proyecciones ortogonales de \mathbb{R}^3 sobre los distintos planos y rectas enunciados en el ejercicio anterior. Determinar los correspondientes núcleos e imágenes.

5) Hallar la matriz en las bases canónicas de la aplicación T del espacio de los polinomios de grado ≤ 3 en \mathbb{R}^4 dada por $T(p(x)) = (p(-1), p(1), p(-2), p(2))$.

Observación: En esta hoja de ejercicios, cuando nos referimos a vectores columna en \mathbb{R}^n , omitimos el símbolo de transposición. Estrictamente hablando, aquí se trata del vector $(p(-1), p(1), p(-2), p(2))^t$.

6) Hallar las matrices en las bases canónicas de las siguientes aplicaciones:

a) La aplicación A de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 dada por $A(x, y, z) = (x - y + 2z, x + y, 2x + 2y + z)$.

b) La aplicación B de \mathbb{C}^2 en \mathbb{C}^2 dada por $B(z_1, z_2) = (iz_1 + 2z_2, z_1 - iz_2)$.

c) La aplicación C de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 dada por $C(x, y, z) = (x + z, y, x + y + z)$.

d) La aplicación D de \mathbb{C}^2 en \mathbb{C}^3 dada por $D(z_1, z_2) = (iz_1 + z_2, z_1 + iz_2, z_1 - iz_2)$.

e) La aplicación E de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^4 dada por $E(x, y) = (x, x + y, 2x, x + 2y)$.

7) Dada la aplicación de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^4 por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en las bases canónicas, hallar la matriz de dicha aplicación en las bases $\{(0, 1), (1, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 y $\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ de \mathbb{R}^4 .

8) Dada la aplicación de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^4 por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en las bases $\{(0, 1), (1, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 y $\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ de \mathbb{R}^4 , hallar la matriz de dicha aplicación en las bases canónicas.

9) Hallar, haciendo un cambio de base, la expresión matricial en la base canónica de la aplicación lineal f de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 tal que:

$$f(1, 1, 0) = (1, 1, 1), \quad f(1, 0, -1) = (0, 1, 1) \quad \text{y} \quad f(1, -1, 1) = (1, 2, 2).$$

10) Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ en las bases canónicas por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Hallar una base del núcleo de f .
- b) Hallar unas ecuaciones cartesianas del núcleo de f .
- c) Hallar una base de la imagen de f .
- d) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la imagen de f .

11) Hallar para qué valores de a , el conjunto $\{(a, 0, 1), (0, 1, 1), (2, -1, a)\}$ es una base de \mathbb{R}^3 .

12) Comprobar que una base de \mathbb{C} considerado como espacio vectorial sobre \mathbb{C} está formada por $\{1\}$, pero una base de \mathbb{C} considerado como espacio vectorial sobre \mathbb{R} es $\{1, i\}$. Estos dos espacios vectoriales tienen distinta dimensión.

13) a) Escribir las matrices de cambio de base en el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales entre las bases $B_1 = \{1, x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3\}$ y $B_2 = \{1, x + 1, (x + 1)^2, (x + 1)^3\}$.

b) Hallar las coordenadas del polinomio $1 + x + x^2 + x^3$ directamente en las dos bases y comprobar que están relacionadas por las matrices de cambio de base.