ÁLGEBRA I. HOJA 6

Problemas de libro Linear Algebra Done Wrong (LADW) de Treil:

- p.46 2.1-2.2;
- p.51 3.1-3.8;
- p.54 4.1;
- p.56, 5.1-5.6;
- pp 58-59 6.1-6.2.;
- pp. 66-68 7.1-7.14;
- pp. 72-73 8.1-8.6.

1. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, los vectores fila determinan un paralelogramo, y los vectores columna otro. Calcular sus áreas. Meditar sobre el resultado. Puede usarse sin remordimientos que el área de un paralelogramo es igual a la longitud de su base por la altura.

2. Sabiendo que las formas bilineales $S : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ forman un e.v. V (con la multiplicación por escalares y la suma suma de formas definidas de la manera natural) calcular su dimensión.

Dada cualquier forma bilineal $S : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$, representarla matricialmente; es decir, hallar una matriz A 2×2 tal que $S(u, v) = u^T Av$.

Sugerencia: basta probar que si $\{v_1, v_2\}$ es cualquier base de $\mathbb{K}^2$, los cuatro valores $S(v_i, v_j)$, $1 \le i, j \le 2$, determinan S.

3. Probar que las formas bilineales simétricas ($S(u, v) = S(v, u)$) forman un subespacio W de V. Calcular su dimensión. Dada cualquier forma bilineal simétrica S, hallar una matriz A 2×2 tal que $S(u, v) = u^T Av$.

4. Probar que las formas bilineales alternadas ($S(u, v) = -S(v, u)$) forman un subespacio Alt de V. Calcular su dimensión. Sea S distinta de 0, y sea $B = \{v_1, v_2\}$ una base de $\mathbb{K}^2$. Dados $u = a_1v_1 + a_2v_2$ y $v = b_1v_1 + b_2v_2$, expresar $S(u, v)$ como $cS(v_1, v_2)$. Al escalar c se le denomina determinante de la matriz $([u]_B\ [v]_B) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$. Observación: el determinante depende de la base $\{v_1, v_2\}$, pero no de la forma S (siempre que no sea la forma 0).

5. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a) \left\{ \begin{array}{rcr} x + 2y - z & = & 7 \\ 2x + y + z & = & 6 \\ x - y + 3z & = & -1 \end{array} \right. \quad b) \left\{ \begin{array}{rcr} 2x + 3y - 5z - 2 & = & 0 \\ 3x - y + 2z + 1 & = & 0 \\ 5x + 4y - 6z - 3 & = & 0 \end{array} \right. \quad c) \left\{ \begin{array}{rcr} 2x + y + 4z + 8t & = & -1 \\ x + 3y - 6z + 2t & = & 3 \\ 3x - 2y + 2z - 2t & = & 8 \\ 2x - y + 2z & = & 4 \end{array} \right.$$

Se pueden comprobar los resultados obtenidos por substitución o aplicando el método de Gauss.

Sol: a)(5/3,8/3,0), b)(-1/5,14/5,6/5), c)(2,-3,-3/2,1/2).

6. Hallar los valores de a para que los siguientes sistemas sean compatibles indeterminados.

$$a)\ \left.\begin{array}{r} ax\ +y\ +z= 1\\ x+ay\ +z= 1\\ x\ +y+az= 1 \end{array}\right\} \qquad b)\ \left.\begin{array}{r} ax\ +y+2z= -2\\ 2x\ +y+az\ = 3\\ x+ay+2z= -2 \end{array}\right\} \qquad c)\ \left.\begin{array}{r} -x+ay+az= 0\\ ax\ -y+az= 0\\ ax+ay\ -z= 0 \end{array}\right\}$$

sol: a) $a = -2$ ó $a = 1$ b) $a = -3$ ó $a = 1$ c) $a = -1$ ó $a = \frac{1}{2}$

7. Hallar los valores de a y b que hagan compatibles los sistemas

$$a)\left\{\begin{array}{rcl} bx - ay - az &=& a\\ -bx \qquad - az &=& a\\ -bx - by - bz &=& b \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{rcl} bx - ay - az - at &=& a\\ -bx \qquad - az - at &=& a\\ -bx - by \qquad - at &=& a\\ -bx - by - bz \qquad &=& a\\ -bx - by - bz - bt &=& b \end{array}\right.$$

sol: a) Para cualesquiera valores de a y b, b) Si $a = 0$.

8. Estudiar los rangos de las siguientes matrices como función de λ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 7\\ 3 & 7 & -6 & -2\\ 5 & 8 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4\\ \lambda & 4 & 10 & 1\\ 1 & 7 & 17 & 3\\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Encontrar bases de los siguientes subespacios:

$$\left.\begin{array}{r} x_1\ +x_3+ 2x_4 = 0\\ x_1\ -x_3 \qquad = 0 \end{array}\right\} \subset \mathbb{R}^4$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 +x_2 +x_3 +x_4 +x_5 = 0\\ x_1 -x_2 +x_3 -x_4 +x_5 = 0 \end{array}\right\} \subset \mathbb{R}^5 \qquad \left.\begin{array}{r} 3x_1 -x_2 +3x_3 -x_4 +3x_5 = 0\\ 3x_1 +x_2 +3x_3 +x_4 +3x_5 = 0 \end{array}\right\} \subset \mathbb{R}^5$$

10. Encontrar una base del subespacio $S \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definido por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b\\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{array}{r} 2a +b -c +d = 0\\ a +b +c -d = 0 \end{array} \right\}$$

11. Encontrar una base del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que tres divisibles por $x - 1$.

12. Comprobar que el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $\{(1, 0, 1, -1)^T, (1, -1, 1, -1)^T\}$ coincide con el espacio de soluciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x_1\ +x_3 +2x_4 = 0\\ x_1\ -x_3 \qquad = 0 \end{array}\right\} \subset \mathbb{R}^4.$$

13. Hallar las ecuaciones cartesianas de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} S_1 &= \mathrm{Span}\{(1, 0, 1, 0)^T, (2, 1, 0, -1)^T, (1, -1, 3, 1)^T\},\\ S_2 &= \mathrm{Span}\{(3, 1, 0, -1)^T, (1, 1, -1, -1)^T, (7, 1, 2, -1)^T\},\\ S_3 &= \mathrm{Span}\{(0, 2, 5, 0)^T\}. \end{aligned}$$

14. Siendo $S_1 = \text{Span}\{(1,-5,2,0)^T,(1,-1,0,2)^T\}$ y $S_2 = \mathcal{L}\{(3,-5,2,1)^T,(2,0,0,1)^T\}$, hallar una base y las ecuaciones cartesianas de S_1+S_2 y de $S_1\cap S_2$.

15. Sean

$$\begin{aligned} S_1 &= \text{Span}\{(1,0,1,0,1)^T,(2,1,0,-1,0)^T,(2,0,1,0,1)^T\},\\ S_2 &= \text{Span}\{(3,1,0,-1,0)^T,(1,1,-1,-1,-1)\}^T. \end{aligned}$$

Comprobar que $S_1+S_2=S_1$ y $S_1\cap S_2=S_2$.

16. Siendo $S_1 = \text{Span}\{(0,1,1,0)^T,(1,0,0,1)^T\}$ y

$$S_2 \equiv \left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 = 0 \\ x_1 & +x_2 & & = 0 \end{array} \right.$$

hallar una base y las ecuaciones cartesianas de S_1+S_2 y $S_1\cap S_2$.

17. Comprobar que son complementarios los subespacios definidos por las ecuaciones:

$$S_1 \equiv \left\{ \begin{array}{llll} -2x_1 & -5x_2 & +4x_3 & = 0 \\ -2x_1 & +7x_2 & & +4x_4 = 0 \end{array} \right. \qquad S_2 \equiv \left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +2x_2 & & +x_4 = 0 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 0 \end{array} \right.$$

18. Hallar una base y las ecuaciones cartesianas de un espacio complementario de

a) $S_1 = \text{Span}\{(0,2,5,0)^T,(-1,1,3,2)^T\}$.

b) $S_2 = \text{Span}\{(1,1,0,0)^T,(1,0,1,0)^T,(0,0,1,1)^T,(0,1,0,1)^T\}$.

19. Hallar una base de $S_1\cap S_2$ y de S_1+S_2, donde

$$S_1 = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad S_2 = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Hallar también las ecuaciones cartesianas de $S_1\cap S_2$ y de S_1+S_2.

20. En $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios que conmutan con cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar una base de cada uno de ellos, de su suma y de su intersección.

b) Hallar una base de un espacio complementario del subespacio de las matrices que conmutan con A.

21. Hallar los subespacios suma e intersección de los siguientes subespacios de las matrices cuadradas de orden n:

a) El subespacio de las matrices triangulares superiores de orden n y el subespacio de las matrices triangulares inferiores.

b) El subespacio de las matrices simétricas de orden n y el subespacio de las matrices antisimétricas de orden n.

22. Consideramos los subespacios del espacio de polinomios de grado ≤ 3 S_1, formado por los polinomios múltiplos de $x+1$, y S_2, formado por los polinomios múltiplos de $x-1$. Hallar los subespacios suma e intersección de S_1 y S_2.

23. En $\mathbb{R}^4$ sean $U = \text{Span}\{u_1, u_2\}$ y $V = \text{Span}\{v_1, v_2\}$ donde

$$u_1 = (1, 1, 2, -\lambda)^T, \quad u_2 = (-1, 1, 0, -\lambda)^T, \quad v_1 = (1, \lambda, 2, -\lambda)^T, \quad v_2 = (2, 3, \lambda, 1)^T.$$

Hallar según los valores de λ las dimensiones de U , V, $U + V$ y $U \cap V$.