ÁLGEBRA I. HOJA 4

1. Usar el algoritmo de Gram-Schmidt para ortogonalizar los vectores en los apartados a) y b) con respecto al producto escalar estándar, y ortonormalizar los vectores en c) con respecto al producto escalar allí indicado. Comentario: en a) y b), puesto que sólo se piden vectores ortogonales, pueden multiplicarse por escalares para obtener expresiones más simples.

a) $(1,1,1),(1,2,2),(1,0,1)$. Respuesta: $(1,1,1),(-2,1,1),(0,-1,1)$.

b) $(2,0,2,-1),(1,0,-2,-2),(2,1,1,-1)$. Respuesta: $(2,0,2,-1),(1,0,-2,-2),(2,9,-1,2)$.

c) $1,t,t^2$ con respecto al producto escalar $(f,g) := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.

2. Sea $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ el conjunto de matrices $m\times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Comprobar que en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

1. La suma es asociativa.
2. Cada matriz tiene un elemento opuesto (inverso aditivo).
3. Sea $m=n$. Entonces el producto de matrices es distributivo (a derecha y a izquierda), con respecto a la suma de matrices.

3. Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},$$

comprobar que no existe una matriz B tal que $AB=I=BA$.

4. Siendo A y B las matrices dadas a continuación, calcular los productos AB y BA cuando sea posible y comparar los resultados.

a) $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&4\\5&5\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}2&3\\0&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&3\\0&8\end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}2&4&0\\5&0&3\\0&1&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5&50\\1&60\\1&86\end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix}2&3&4\\4&3&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\\4&4\end{pmatrix}$

5. ¿Es cierta para matrices cuadradas la relación $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$? Probar la relación, o suministrar un contraejemplo. Determinar que sucede en el caso especial de las matrices 2×2 de la forma $\begin{pmatrix}u&-v\\v&u\end{pmatrix}$. ¿Es el producto de tales matrices conmutativo? Si son distintas de la matriz 0 ¿tienen siempre un inverso multiplicativo?

6. Comprobar que el producto de dos matrices puede ser nulo sin que lo sean ninguno de los factores, hallando AB, siendo A y B las matrices dadas a continuación:

a) $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}3&6\\1&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Calcular BA, donde $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

8. Siendo A, B y C las matrices dadas a continuación, calcular los productos AB, $(AB)C$, BC, y $A(BC)$. ¿Es $(AB)C = A(BC)$?. En general, ¿es el producto de matrices 2×2 asociativo?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. ¿Es el producto de matrices asociativo en general? No suponemos que las matrices son cuadradas, pero si que los productos están bien definidos. Por ejemplo, si A es 2×1, B es 1×2 y C es 2×2, ¿se cumple siempre que $(AB)C = A(BC)$?

10. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 9/10 & 2/10 \\ 1/10 & 8/10 \end{pmatrix},$$

calcular A^2, A^4, y A^8. Una pregunta para meditar sobre ella: ¿existe $\lim_{n\to\infty} A^n$?.