ÁLGEBRA I. HOJA 3

1. Sean A, B matrices de tamaños $n \times m$ y $m \times n$, respectivamente. Sea $tr(A)$ la traza de la matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{i,j=1}^k$, definida mediante $tr(A) := \sum_{i=1}^k a_{ii}$. Demostrar que $tr(AB) = tr(BA)$.

2. Sea $M_{m,n}(\mathbb{R})$ el espacio de matrices $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$, sea B^T la matriz traspuesta de B. Probar que la traza define un producto escalar en $M_{m,n}(\mathbb{R})$ mediante $(A, B) := tr(B^T A)$.

3. Probar que con dicho producto escalar, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base ortonormal de $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

4. Sea $P(\mathbb{R})$ el espacio de polinomios sobre $\mathbb{R}$. Probar que $(f, g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$ define un producto escalar en $P(\mathbb{R})$.

5. a) Comprobar que $\left((a, b)^T, (c, d)^T\right)_1 := ac - 2ad - 2bc + 5bd$ define un producto escalar en el plano real $\mathbb{R}^2$.

b) Calcular las normas de los vectores $u = (1, 2)^T$ y $v = (4, 5)^T$ con respecto al producto escalar habitual $(\cdot, \cdot)_h$ y con respecto al producto $(\cdot, \cdot)_1$. Calcular también $(u, v)_h$ y $(u, v)_1$.

6. Hallar el ángulo entre los vectores e_1 y $(1, 1, 1)^T$ en $\mathbb{R}^3$.

7. a) Sean $u = (z_1, z_2)^T$ y $v = (w_1, w_2)^T$ vectores en $\mathbb{C}^2$. Comprobar que

$$(u, v)_1 := z_1\overline{w}_1 + (1 + i)z_1\overline{w}_2 + (1 - i)z_2\overline{w}_1 + 3z_2\overline{w}_2$$

define un producto hermítico en $\mathbb{C}^2$.

b) Calcular las normas de los vectores $u = (1 - i, 2 + 3i)^T$ y $v = (4 + 2i, 5 + i)^T$ con respecto al producto escalar habitual $(\cdot, \cdot)_h$ y con respecto al producto $(u, v)_1$. Calcular también $(u, v)_h$ y $(u, v)_1$.

8. Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

$$\left(\int_{99\pi/200}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos x dx \right)^2 \leq \int_{99\pi/200}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^2 \, dx \cdot \int_{99\pi/200}^{\pi/2} (\cos x)^2 \, dx.$$

9. Sea L la recta que pasa por $(-2, 1, 3)^T$ y $(1, 2, 4)^T$. Hallar el punto de L más próximo al origen, y la distancia mínima. *Respuestas:* $(-16/11, 13/11, 35/11)^T$, $\sqrt{150/11}$.

10. Hallar una base para el complemento ortogonal del subespacio generado por $(1, 2, 3)$ en $\mathbb{R}^3$.

11. a) Sea $P_2(\mathbb{R})$ el espacio de polinomios sobre $\mathbb{R}$ de grado ≤ 2, con el producto escalar $(f, g)_1 := \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Hallar una base para el complemento ortogonal del subespacio generado por $1 + 3t$.

b) Hacer lo mismo para el caso cuando el producto escalar en $P_2(\mathbb{R})$ se define por $(f, g)_2 := \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$.

¿Coinciden los complementos ortogonales en estos dos casos?

12. Escribiendo $y = y(x)$ (de modo que x es la variable independiente), y con los datos siguientes, hallar la correspondiente recta de regresión $y = ax + b$.

Datos: $(x, y) = (1, 1), (3, 2), (4, 4), (6, 4), (8, 5), (9, 7), (11, 8), (14, 9)$.

13. Se quiere calibrar una nueva técnica experimental indirecta para medir presiones en relación con un método estándar directo. Para esto, se han realizado 9 tomas de presión (en mm de Hg) por el método estándar directo (X) y por la nueva técnica experimental indirecta (Y). Los resultados obtenidos se resumen a continuación:

$$\sum x_i = 343 \qquad \sum y_i = 325 \qquad \sum x_i^2 = 17693 \qquad \sum y_i^2 = 16367 \qquad \sum x_i y_i = 16992$$

Calcular la recta de regresión de Y sobre X. Para una presión de 55 mm de Hg, medida con el método estándar, ¿qué presión cabría esperar con la nueva técnica?