ÁLGEBRA I. HOJA 2

1. Estudiar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$.

1. $A = \{(3x_2, x_2, x_4 + x_2, x_4)^T \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$.
2. $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_1 \cdot x_2 = 0\}$.
3. $C = \{(x_1, x_2, x_1, x_2)^T \mid x_1 = 1\}$.
4. $D = \{(x_1, x_1, x_1, x_1)^T \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$.
5. $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_1 = t, x_2 = t, x_3 = 2t, x_4 = 5t, t \in \mathbb{R}\}$.

2. Comprueba si son o no espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ los siguientes conjuntos con las operaciones indicadas:

1. $V = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2\}$, $\quad (x_1, x_2)^T + (y_1, y_2)^T = (x_1 + y_1, 0)$, $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0)$.
2. $V = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\}$, $\quad (x_1, x_2)^T + (y_1, y_2)^T = (x_1 y_1, x_2 y_2)^T$, $\lambda(x_1, x_2)^T = (\lambda x_1, \lambda x_2)^T$.

3. Sea $\mathbb{K}$ el cuerpo de los números reales ó bien el cuerpo de los números complejos (es decir, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Dado un $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $\mathcal{P}_n^{\mathbb{K}}$ el conjunto de polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$.

Decidir razonadamente si los siguientes conjuntos, con la adición y multiplicación por escalares en $\mathbb{K}$ definidas de manera natural, forman espacios vectoriales:

1. $\mathcal{P}_n^{\mathbb{K}}$.
2. el conjunto de polinomios en $\mathcal{P}_n^{\mathbb{K}}$ de grado *igual* a n.
3. $\{f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que f es continua$\}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$.
4. $\{f\colon [0,1] \to \mathbb{R}_+$ tal que f es continua$\}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$, donde $\mathbb{R}_+$ denota los números positivos.

4. Sea $\mathcal{P}^{\mathbb{R}}$ el espacio de todos los polinomios sobre $\mathbb{R}$. Comprobar que, con las adición y multiplicación por escalares definidas de manera natural, es un espacio vectorial. ¿Existe una base de $\mathcal{P}^{\mathbb{R}}$?

5. ¿Cuáles de las siguientes familias de vectores forman un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$ (con las operaciones usuales)?

1. $\{(1,2,3)^T, (1,2,5)^T\}$,
2. $\{(1,2,3)^T, (1,2,5)^T, (0,0,-4)^T\}$,
3. $\{(1,2,3)^T, (1,2,5)^T, (0,0,-4)^T, (1,1,1)^T\}$.

6. ¿ Cuáles de las 3 familias de vectores que aparecen en el ejercicio anterior son linealmente independientes?

7. ¿ Cuáles de las 3 familias de vectores que aparecen en el ejercicio anterior forman una base de $\mathbb{R}^3$?

8. Determinar si la familia de vectores $\{(1, 1+2i)^T, (i, -2+i)^T\}$ es una base del espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^2$.

9. Se considera el espacio vectorial real $\mathcal{P}_3^{\mathbb{R}}$.

1. ¿Es $W_1 = \{p(x) \in \mathcal{P}_3^{\mathbb{R}} \colon (x-1) \text{ divide a } p(x)\}$ un subespacio de $\mathcal{P}_3^{\mathbb{R}}$?
2. ¿Es $W_2 = \{p(x) \in \mathcal{P}_3^{\mathbb{R}} \colon p(2) = 0\}$ un subespacio de $\mathcal{P}_3^{\mathbb{R}}$?
3. Escribir, si es posible, los polinomios $1, x, x^2, x^3$ como combinación lineal del sistema de vectores formado por $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ y sus tres primeras derivadas $p'(x), p''(x)$ y $p'''(x)$.

10. Se consideran los subconjuntos V y W de $\mathbb{C}^4$ donde

$$V = \left\{(z_1, z_2, z_3, z_4)^T \in \mathbb{C}^4 \colon \quad z_1 = -iz_2 + (1+i)z_3 + z_4\right\}$$

y las ecuaciones paramétricas de W son

$$\left.\begin{array}{rcl} z_1 & = & \mu + i\beta \\ z_2 & = & \lambda + i\mu \\ z_3 & = & i\lambda \\ z_4 & = & \lambda + i\beta \end{array}\right\}, \qquad \lambda,\ \mu,\ \beta \in \mathbb{C}.$$

1. Comprobar si V y W son subespacios de $\mathbb{C}^4$.

2. Comprobar si es cierto que $W \subset V$.

3. Responder a las mismas preguntas, si en las ecuaciones paramétricas de W sólo se admiten λ, μ, β reales.

11. El vector v del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ tiene coordenadas $(1, 2)$ respecto de la base $B = \{v_1, v_2\}$. Hallar las coordenadas de v en la base $B' = \{u_1, u_2\}$ en $\mathbb{R}^2$, sabiendo que

$$v_1 = 3u_1 + 2u_2; \qquad v_2 = 4u_1 - u_2\,.$$

12. Estudiar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales entre los espacios vectoriales dados:

I) $f_1 \colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $f_1(A) = AB$, donde $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

II) $f_2 \colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $f_2(A) = A + B$, con $B \in M_2(\mathbb{R})$ fija.

III) $f_3 \colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $f_3(A) = AB - BA$, donde $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

IV) $f_4 \colon M_2(\mathbb{C}) \to V$ dada por $f_4(A) = A + A^T$, donde $V = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \colon A = A^T\}$.

V) $f_5 \colon M_2(\mathbb{R}) \to W$ dada por $f_5(A) = AA^T$, donde $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \colon A = A^T\}$.

VI) $f_6 \colon \mathcal{P}_n^{\mathbb{R}} \to \mathcal{P}_n^{\mathbb{R}}$ dada por $f_6(p(x)) = p(x+1)$.

VII) $f_7 \colon \mathcal{P}_n^{\mathbb{R}} \to \mathcal{P}_n^{\mathbb{R}}$ dada por $f_7(p(x)) = p(x) + 1$.

VIII) $f_8 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f_8(v) = \lambda_0 v$ con $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ fijo.

IX) $f_9 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f_9(v) = v_0 - v$ con $v_0 \in \mathbb{R}^3$ fijo.

X) $f_{10} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f_{10}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 1, x_3)^T$.

XI) $f_{11} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f_{11}(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - x_2^2, 0, 0)^T$.

XII) $f_{12} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f_{12}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_3)^T$.