

ÁLGEBRA I. HOJA 1

1. Representar gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones, y hallar todas las soluciones. Hallar el ángulo entre cada par de rectas (esta pregunta es un poco ambigua).

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 8 \\ 2x + y = 4 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2x + y = 8 \\ x - y = -2 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2x + y = 8 \\ 4x + 2y = 16 \end{array} \right\}.$$

2. Hallar las ecuaciones, en forma paramétrica, de la recta que pasa por los puntos $(2, -1, 3)$ y $(-1, 0, 3)$ en \mathbb{R}^3 .

Respuesta parcial: $x = 2 - 3t$.

3. Sea $B_1 = \{e_1, e_2\}$ la base canónica del plano real \mathbb{R}^2 , y sea $B_2 = \{v_1, v_2\}$ la base compuesta por los vectores $v_1 = (1, 1)$ y $v_2 = (1, 2)$. Hallar las coordenadas de e_1 y e_2 con respecto a B_2 .

4. Resolver $z^3 = i$ en coordenadas polares y rectangulares. (Recordatorio: las coordenadas rectangulares, o cartesianas, o binómicas, son de la forma $a + ib$; las polares, $re^{i\alpha}$).

Solución (parcial): $\sqrt{3}/2 + i/2, -\sqrt{3}/2 + i/2, -i$.

5. Resolver $iz + (2 - 10i)z = 3z + 2i$.

Solución: $-9/41 - i/41$.

6. Resolver $z^2 = -8 - 6i$.

7. Resolver $z^2 - (3 + i)z + 4 + 3i = 0$.

Solución: $2 - i, 1 + 2i$.

8. Resolver el sistema $(i + 1)z + (2 - i)w = -3i, (2i + 1)z + (3 + i)w = 2 + 2i$.

Solución: $z = -1 + 5i, w = 19/5 - 8i/5$.

9. Escribir $\sum_{n=0}^{99} (i + 1)^n$ en coordenadas rectangulares y polares. Solución: $(1 + 2^{50})i$.

10. Escribir en coordenadas polares $4 + i, -3/2 - i/2, -1 + 2i$.

11. Comprobar que $(1 + i)^{12} = -64$, y $((1 - i)/\sqrt{2})^{-6} = -i$.

12. Resolver las siguientes ecuaciones i) $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$; ii) $z^4 = i$; iii) $z^3 = -8i$.

Soluciones a iii): $z = 2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$.

13. Recordad que las rotaciones en el espacio tridimensional (que fijan el origen) no conmutan en general. Decidir razonadamente si las rotaciones en el plano alrededor del origen conmutan.

14. Usando $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, donde x es un número real, demostrar que $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ y $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$.

15. Sea $\|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ la norma euclídea (la longitud) del vector $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Comprobar que para todo par de vectores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, la norma del producto vectorial $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|_2$ nos da el área del paralelogramo determinado por \mathbf{v} y \mathbf{w} .

16. Hallar los siguientes números complejos en forma binómica $a + bi$:

$$(1 + 2i)(1 - 2i), \quad \frac{1 + 2i}{1 - 2i}, \quad \left(\frac{1 + 2i}{1 - 2i} \right)^2, \quad \frac{(1 + 2i)^3}{(2 - i)^3}, \quad \frac{(1 + 2i)^3}{(2 - 2i)^3}.$$

17. Hallar un número complejo en forma binómica: $a + bi$ tal que $(a + bi)^2 = 1 + i$.
18. Resolver la ecuación $x^4 - 2x^2 + 10 = 0$ en el cuerpo de los números complejos.
19. Resolver la ecuación $z^2 - (1 + i)z + i = 0$ en el cuerpo de los números complejos.
20. Demostrar

$$\text{a) } \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\text{b) } \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

21. Demostrar que para todo polinomio $p(z)$ con coeficientes reales, $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$.

22. Demostrar:

$$\text{a) } |\overline{z}| = |z|.$$

$$\text{b) } |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \text{ usando coordenadas rectangulares.}$$

$$\text{c) } |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

23. De los números complejos enunciados a continuación calcular su módulo y su argumento y escribirlos en forma trigonométrica o polar.

$$1 + i, \quad 1 - i, \quad -1 - i, \quad \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}.$$

24. Demostrar utilizando la forma binómica y la forma polar de los números complejos que:

- a) El producto de un número por su conjugado es un número real.
- b) El cociente de un número por su conjugado es de módulo 1. Observar que la demostración usando la forma polar es más corta.
- c) Comprobar los resultados anteriores en los cálculos siguientes:

$$(1 + 2i)(1 - 2i), \quad \frac{3 + 4i}{3 - 4i},$$

d) Utilizar los resultados anteriores para calcular:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

25. Probar la asociatividad de la multiplicación de números complejos usando su expresión en forma polar y comparar la simplicidad del cálculo respecto del que hay que hacer para demostrarla en forma binómica.

26. Calcular en forma polar y en forma binómica los siguientes números complejos:

$$\sqrt{-4}, \quad \sqrt{i}, \quad \sqrt{-i}.$$

Comprobar que los resultados son los mismos.

27. Calcular en forma binómica y en forma trigonométrica los siguientes números complejos:

$$\sqrt{1 + i}, \quad \sqrt{-2 + 2i}.$$

Comparando las expresiones determinar el valor de $\cos(\pi/8)$ y $\cos(3\pi/8)$.

Comprobar que $\cos^2(\pi/8) + \cos^2(3\pi/8) = 1$. ¿Porqué?

28. Expresar las siguientes raíces en forma binómica utilizando la forma trigonométrica correspondiente y el ejercicio anterior.

$$\sqrt[4]{-16}, \quad \sqrt[3]{-8}, \quad \sqrt[3]{-27i}, \quad \sqrt[4]{16i}.$$

29. Hallar las raíces cuartas de $-i$ y representarlas gráficamente.
30. Hallar las raíces quintas de la unidad. Señalar cuáles son las raíces que son conjugadas entre sí.
31. Hallar las siguientes raíces:

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}}, \quad \sqrt[6]{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

¿Cómo están relacionadas entre sí?

32. Resolver en el cuerpo de los números complejos las ecuaciones:

$$x^6 + 1 = 0, \quad x^6 + 2x^3 + 1 = 0.$$

33. Habiendo comprobado que $(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1)(x - 1) = x^n - 1$, demostrar que

- Las soluciones complejas y las soluciones reales de $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0$ son raíces $(n + 1)$ -ésimas de la unidad.
- La ecuación $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ no tiene ninguna solución real.
- La ecuación $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0$ no tiene ninguna solución real si n es par y tiene exactamente una solución real si n es impar. ¿cuál es la solución real si n es impar?
- Las raíces $(n + 1)$ -ésimas de la unidad que no coinciden con 1, son soluciones de la ecuación $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0$.

34. Resolver en el cuerpo de los números complejos las ecuaciones:

$$x^6 + x^5 - x - 1 = 0, \quad x^7 + x^6 - x - 1 = 0.$$

35. Describir el conjunto del plano complejo determinado por las siguientes relaciones:

$$(i) |z - 2| > |z + 2|; \quad (ii) \Re z + \Im z < 1.$$

36. Demostrar las fórmulas:

$$(i) |z + 1|^2 - |z - 1|^2 = 4\Re z; \quad (ii) |z + 1|^2 + |z - 1|^2 = 2 + 2|z|^2.$$

37. Deducir las fórmulas del coseno del ángulo triple y del seno del ángulo triple, de la fórmula de De Moivre $(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)$.

38. Hallar $\cos(\pi/12)$ calculando la raíz de $e^{i\pi/6}$.

39. Usando como definición $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc$, resolver las ecuaciones

$$(a) \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0; \quad (b) \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -2 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Observación: En general, se dice que un número λ es *un autovalor* o *valor propio* de una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

40. Encontrar todos los autovalores de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.