ÁLGEBRA I. HOJA 7

1. Averiguar si son lineales las siguientes aplicaciones:

a) La aplicación del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n en el espacio vectorial de las matrices antisimétricas de orden n dada por $\mathcal{A}(B) = \frac{1}{2}(B - B^t)$.

b) La aplicación traza definida en el espacio vectorial de las matrices cuadradas 3×3 con entradas reales sobre $\mathbb{R}$.

c) La aplicación del espacio vectorial de los polinomios de grado $\leq n$ en éste mismo espacio vectorial dada por $T(p(x)) = p(x-1)$.

d) La aplicación del espacio vectorial de los polinomios de grado $\leq n$ en éste mismo espacio vectorial dada por $T(p(x)) = p(x) - 1$.

e) La aplicación del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n en el mismo espacio vectorial dada por $P(A) = AB$ donde B es una matriz fija.

f) La aplicación del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n en el mismo espacio dada por $Q(A) = A + B$ donde B es una matriz fija.

g) La aplicación del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n en el mismo espacio dada por $C(A) = AB - BA$ donde B es una matriz fija.

2. Escribir la matriz de un giro (rotación):

a) de noventa grados en sentido positivo (contrario al de las agujas del reloj), alrededor del origen en $\mathbb{R}^2$.

b) de ángulo α en sentido positivo alrededor del origen en $\mathbb{R}^2$.

3. Escribir la matriz de la simetría (reflexión) de $\mathbb{R}^3$ respecto a:

a) El plano de ecuación y = x.

b) El plano de ecuación y = z .

c) El plano de ecuación x = z .

d) La recta de ecuaciones y = x, z = 0.

e) La recta de ecuaciones y = z , x = 0.

f) La recta de ecuaciones x = z , y = 0.

4. Escribir las matrices de las proyecciones ortogonales de $\mathbb{R}^3$ sobre los distintos planos y rectas enunciados en el ejercicio anterior.

Un *homomorfismo* de espacios vectoriales es una aplicación lineal $T : V \to W$. Un *endomorfismo* es un homomorfismo con el mismo espacio de partida y de llegada ($T : V \to V$). Un *automorfismo* es un endomorfismo biyectivo, es decir, un isomorfismo con el mismo espacio de partida y de llegada (por ejemplo, una rotación en $\mathbb{R}^2$).

5. Determinar la matriz que corresponde en las bases canónicas al endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que transforma los vectores $\{(3,2,1),(0,2,1),(0,0,1)\}$ en los vectores $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ respetando el orden.

a) Calculando las imágenes de los vectores de la base canónica.

b) Planteando un cambio de base de la base canónica a la base $\{(3,2,1),(0,2,1),(0,0,1)\}$ (si es que realmente es una base).

6. Hallar la matriz en las bases canónicas de la aplicación del espacio de los polinomios de grado ≤ 3 en $\mathbb{R}^4$ dada por $f(p(x)) = (p(-1), p(1), p(-2), p(2))$.

7. Hallar las matrices en las bases canónicas de las siguientes aplicaciones:

a) La aplicación A de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ dada por $A(x, y, z) = (x - y + 2z, x + y, 2x + 2y + z)$.

b) La aplicación B de $\mathbb{C}^2$ en $\mathbb{C}^2$ dada por $B(z_1, z_2) = (iz_1 + 2z_2, z_1 - iz_2)$.

c) La aplicación C de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ dada por $C(x, y, z) = (x + z, y, x + y + z)$.

d) La aplicación D de $\mathbb{C}^2$ en $\mathbb{C}^3$ dada por $D(z_1, z_2) = (iz_1 + z_2, z_1 + iz_2, z_1 - iz_2)$.

e) La aplicación E de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^4$ dada por $E(x, y) = (x, x + y, 2x, x + 2y)$.

8. Hallar la matriz en las bases canónicas de la aplicación traza considerada en el espacio de las matrices cuadradas de orden 2 de números reales con valores en $\mathbb{R}$.

9. Dada la aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^4$ por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en las bases canónicas, hallar la matriz de dicha aplicación en las bases $\{(0, 1), (1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)(0, 0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^4$.

10. Dada la aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^4$ por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en las bases $\{(0, 1), (1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)(0, 0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^4$, hallar la matriz de dicha aplicación en las bases canónicas.

11. Hallar, haciendo un cambio de base, la expresión matricial en la base canónica de la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ tal que:

$$f(1, 1, 0) = (1, 1, 1), \quad f(1, 0, -1) = (0, 1, 1) \text{ y } \quad f(1, -1, 1) = (1, 2, 2).$$

12. Hallar la matriz de la aplicación lineal del ejercicio 7:

a) en la base $\{(3, 2, 1)(0, 2, 1)(0, 0, 1)\}$.

b) en la base $\{(1, 0, 0)(1, 1, 0)(1, 1, 1)\}$.

c) Comprobar que las matrices obtenidas anteriormente están relacionadas con la matriz del endomorfismo en la base canónica por las matrices de cambio de base correspondientes entre las bases.

13. Utilizando cambios de base calcúlense las matrices en las bases canónicas de:

a) La simetría ortogonal de $\mathbb{R}^3$ respecto a la recta generada por el vector $(-1, 1, -1)$.

b) La proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano de ecuación $x + y + z = 0$.

c) Las rotaciones vectoriales de noventa grados de $\mathbb{R}^3$ respecto a la recta de ecuaciones: $x + y = 0, z = 0$.

14. Determinar cuál es el núcleo y cuál es la imagen:

a) de una proyección ortogonal de $\mathbb{R}^2$ sobre una de sus rectas.

b) de una proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre una de sus rectas.

c) de una proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre uno de sus planos.

d) de una simetría ortogonal de $\mathbb{R}^2$ respecto a una de sus rectas.

e) de una simetría ortogonal de $\mathbb{R}^3$ respecto a una de sus rectas.

f) de una simetría ortogonal de $\mathbb{R}^3$ respecto a uno de sus planos.

15. Hallar las ecuaciones cartesianas y una base de los núcleos y de las imágenes de las aplicaciones lineales del ejercicio 9.

16. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ en las bases canónicas por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar una base del núcleo de f.

b) Seleccionar las ecuaciones del núcleo de f.

c) Hallar una base de la imagen de f.

d) Hallar las ecuaciones cartesianas de la imagen de f.

17. Siendo A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar c para que el sistema $Ax = b$ tenga solución en los dos casos siguientes: $b = (1, 0, 1, c)^t$ y $b = (1, 0, c, 1)^t$.

b) En los casos anteriores, ¿es el sistema compatible determinado o indeterminado?

18. **a)** Hallar las ecuaciones cartesianas y una base del núcleo y de la imagen de la aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ (endomorfismo) dada por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La unión de las dos bases encontradas correspondientes al núcleo y a la imagen es un conjunto de cuatro vectores. ¿Es una base de $\mathbb{R}^4$? ¿Podríamos conseguir una base de $\mathbb{R}^4$ como unión de otras bases distintas del núcleo y de la imagen de estas aplicaciones?

b) Responder a las mismas cuestiones para la aplicación lineal g dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

19. Dada la aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ (endomorfismo) por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hallar la dimensión del subespacio vectorial $f(L) \subset \mathbb{R}^4$ en los dos casos siguientes:

a) $L \equiv x_3 = 0$.

b) $L \equiv x_1 + x_3 - x_4 = 0$.

¿Hay algún hiperplano de $\mathbb{R}^4$, cuya imagen es otro hiperplano? (Un hiperplano de $\mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial de dimensión $n-1$).

20. Dada la aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ (endomorfismo) por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar las ecuaciones cartesianas del subespacio vectorial $f(L) \subset \mathbb{R}^4$ si $L \equiv x_3 - x_4 = 0$.

b) Hallar las ecuaciones cartesianas de un subespacio vectorial $L \neq \mathbb{R}^4$, tal que su imagen sea un hiperplano de $\mathbb{R}^4$. (Un hiperplano de $\mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial de dimensión $n-1$).

c) ¿Hay algún hiperplano de $\mathbb{R}^4$, cuya imagen sea una recta?

21. Cualquier matriz puede expresarse como suma de una matriz simétrica y de una matriz antisimétrica. Considerar en $\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ las aplicaciones lineales:

a) La que hace corresponder a cada matriz su matriz simétrica sumando.

b) La que hace corresponder a cada matriz su matriz antisimétrica sumando.

Hallar el núcleo y la imagen de cada aplicación.

22. Comprobar la fórmula de las dimensiones en todas las aplicaciones lineales de los ejercicios anteriores en las que se han calculado núcleo e imagen.

23. Comprobar que es posible hallar una aplicación definida en $\mathbb{R}^3$ con imagen en $\mathbb{R}^3$, tal que:

a) Su núcleo es el plano de ecuación $x+y+z=0$ y su imagen es la recta $x=y=2z$.

b) Su imagen es el plano de ecuación $x+y+z=0$ y su núcleo es la recta $x=y=2z$.

c) Hallar las matrices correspondientes en la base canónica.

24. Comprobar que es posible hallar una aplicación definida en $\mathbb{R}^4$ con imagen en $\mathbb{R}^4$, tal que tanto su núcleo como su imagen sean el subespacio de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rrrrl} x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4 & =0 \\ & x_2+ & x_3 & & =0 \end{array}\right\}$$

Hallar la matriz de dicha aplicación en la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

25. Compruébese que:

a) La composición de dos aplicaciones lineales es una aplicación lineal y

b) La matriz de la composición de ellas es el producto de sus matrices.

26. Sea f un isomorfismo en $\mathbb{R}^3$ y g otra aplicación lineal tal que la dimensión de la imagen de $g \circ f$ es 2.

a) ¿Cuál es el rango de la matriz de g?

b) ¿Cúal es la dimensión de la imagen de $f \circ g$?

27. Hallar las coordenadas de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en la base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

28. Encontrar los valores de a para los que los vectores $\{(a, 0, 1), (0, 1, 1), (2, -1, a)\}$ formen una base de $\mathbb{R}^3$.

29. Hallar los números complejos z para los cuales los vectores: $\{(z + i, 1, i), (0, z + 1, z), (0, i, z - 1)\}$ no forman una base considerados como vectores del espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^3$ sobre $\mathbb{C}$.

30. Comprobar que una base de $\mathbb{C}$ considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ está formada por $\{1\}$, pero una base de $\mathbb{C}$ considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ es $\{1, i\}$. Estos dos espacios vectoriales tienen distinta dimensión.

31. Calcular la dimensión y extraer una base del subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por

$$\{(1, 0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0, 1), (1, 1, 3, 1, 1), (0, 0, 1, 1, 1), (0, -1, 1, 2, 1)\}.$$

32. Encontrar una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga a los vectores $\{(0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0)\}$.

33. Calcular según los valores de α, β y γ la dimensión del subespacio vectorial:

$$E = \mathcal{L}\{(1, 1, 0), (2, 1, \alpha), (3, 0, \beta), (1, \gamma, 1)\}$$

34. Dado el subespacio vectorial de las matrices cuadradas 2×2 generado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

extraer una base del subespacio considerado, de este sistema de generadores.

35. Dado el subespacio vectorial de los polinomios de grado 3 generado por los vectores: $\{x^2 - 1, x^2 + 1, x^3 + 4, x^3\}$ extraer una base de este sistema de generadores.

36. Siendo $B_1 = \{v_1 = (1, 1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0, -1), v_3 = (0, 1, 1, 0), v_4 = (0, 0, 0, 1)\}$ y $B_2 = \{w_1 = (1, 0, 0, 1), w_2 = (1, 0, 1, 0), w_3 = (0, 2, 1, 0), w_4 = (0, 1, 0, 1)\}$ dos bases de $\mathbb{R}^4$, hallar:

a) Las coordenadas del vector $3w_1 + 2w_2 + w_3 - w_4$ en la base $B_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

b) Las coordenadas del vector $3v_1 - v_3 + 2v_2$ en la base $B_2 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$.

c) La matriz de cambio de base de B_1 a B_2.

d) La matriz de cambio de base de B_2 a B_1.

37. **a)** Hallar las matrices de cambio de base en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ entre las siguientes bases:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$y \quad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Hallar las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ directamente en las dos bases anteriores y comprobar que están relacionadas por las matrices de cambio de base.

38. **a)** Escribir las matrices de cambio de base en el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales entre las bases $B_1 = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$ y $B_2 = \{1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3\}$.

b) Hallar las coordenadas del polinomio $1 + x + x^2 + x^3$ directamente en las dos bases y comprobar que están relacionadas por las matrices de cambio de base.