ÁLGEBRA I. HOJA 9

1. Probar que los autovectores correspondientes a autovalores distintos, son linealmente independientes.

2. Hallar los autovalores de las siguientes matrices, y diagonalizar cuando sea posible (es decir, hallar una matriz inversible P tal que $A = PDP^{-1}$).

a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} -2 & 9 & -6 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -9 & 5 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

f) $\begin{pmatrix} -10 & 6 & 3 \\ -26 & 16 & 8 \\ 16 & -10 & -5 \end{pmatrix}$.

g) $\begin{pmatrix} 0 & -6 & -16 \\ 0 & 17 & 45 \\ 0 & -6 & -16 \end{pmatrix}$.

Probar que las matrices en f) y g) son similares.

3. Diagonalizar $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular A^5.

Respuesta parcial: los autovalores son 5 y -1.

4. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Demostrar que $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable.

5. Probar que si $a \in \mathbb{R}$ no es un múltiplo entero de π, entonces la matriz $\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$ no tiene autovectores.

6. Probar que si $a \in \mathbb{R}$, entonces la matriz $A := \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ \sin a & -\cos a \end{pmatrix}$ tiene (al menos) un autovector v asociado al autovalor 1. Probar que si w es perpendicular a v, entonces $Aw = -w$.