

ÁLGEBRA I. HOJA 3

1. Sea $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ el conjunto de matrices $m \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} . Comprobar que en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$

1. La suma es asociativa.
2. Cada matriz tiene un elemento opuesto (inverso aditivo).
3. Sea $m = n$. Entonces el producto de matrices es distributivo (a derecha y a izquierda), con respecto a la suma de matrices.

2. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

comprobar que no existe una matriz B tal que $AB = I = BA$.

3. Siendo A y B las matrices dadas a continuación, calcular los productos AB y BA cuando sea posible y comparar los resultados.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 50 \\ 1 & 60 \\ 1 & 86 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

4. ¿Es cierta para matrices cuadradas la relación $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? Probar la relación, o suministrar un contraejemplo. Determinar que sucede en el caso especial de las matrices 2×2 de la forma $\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$. ¿Es el producto de tales matrices conmutativo? Si son distintas de la matriz 0 ¿tienen siempre un inverso multiplicativo?

5. Comprobar que el producto de dos matrices puede ser nulo sin que lo sean ninguno de los factores, hallando AB , siendo A y B las matrices dadas a continuación:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Siendo A , B y C las matrices dadas a continuación, calcular los productos $D := AB$, DC , $E := BC$, y AE . ¿Es $DC = AE$? En general, ¿es el producto de matrices 2×2 asociativo?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. ¿Es el producto de matrices asociativo? No suponemos que las matrices son cuadradas, pero si que los productos están bien definidos. Por ejemplo, si A es 2×1 , B es 1×2 y C es 2×2 , ¿se cumple siempre que $(AB)C = A(BC)$?

8. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 9/10 & 2/10 \\ 1/10 & 8/10 \end{pmatrix},$$

calcular A^2 , A^4 , y A^8 . Una pregunta para meditar sobre ella: ¿existe $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$?

9. Escribiendo $y = y(x)$ (de modo que x es la variable independiente), y con los datos siguientes, hallar la correspondiente recta de regresión $y = ax + b$.

Datos: $(x, y) = (1, 1), (3, 2), (4, 4), (6, 4), (8, 5), (9, 7), (11, 8), (14, 9)$.

Solución: $a = 6/11, b = 7/11$.

ADEMAS:

LADW, pp. 122-123, del 1.1 al 1.9. pp. 126-127, 2.1, 2.3-2.6, pensar sobre el 2.7.