ÁLGEBRA I. HOJA 2

1. Probar que el triángulo formado por los puntos (-3, 5, 6), (-2, 7, 9) y (2, 1, 7) es un triángulo rectangulo. Hallar los otros ángulos.

2. Probar que los puntos (2, 1, 4), (1, -1, 2), (3, 3, 6) están en la misma recta.

Resolver los Ejercicios del libro (LADW) en las páginas 5 (del 1.1 al 1.6) y 11 (del 2.1 al 2.6).

3. ¿Cuales de las siguientes familias de vectores forman un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$?

1. $\{(1,2,3),(1,2,5)\}$
2. $\{(1,2,3),(1,2,5),(0,0,-4)\}$
3. $\{(1,2,3),(1,2,5),(0,0,-4),(1,1,1)\}$

4. ¿Cuales de las 3 familias de vectores que aparecen en el ejercicio anterior son linealmente independientes?

5. ¿Cuales de las 3 familias de vectores que aparecen en el ejercicio anterior forman una base de $\mathbb{R}^3$?

6. Dado el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^2$, determinar si la familia de vectores $\{(1, 1+2i), (i, -2+i)\}$ es una base de $\mathbb{C}^2$.

7. Sea L la recta que pasa por (-2, 1, 3) y (1, 2, 4). Hallar el punto de L más próximo al origen, y la distancia mínima.
Respuestas: $(-16/11, 13/11, 35/11)$, $\sqrt{150/11}$.

8. Hallar el área del triángulo con vertices $(3,0,2),(6,1,4),(2,1,0)$.

9. Comprobar que $((a,b),(c,d))_1 := ac - 2ad - 2bc + 5bd$ define un producto escalar en el plano real.

10. Calcular las normas de los vectores $u = (1,2)$ y $v = (4,5)$ con respecto al producto escalar habitual $(\cdot,\cdot)_h$ y con respecto al producto $((a,b),(c,d))_1 = ac - 2ad - 2bc + 5bd$. Calcular también $(u,v)_h$ y $(u,v)_1$.

11. Sea $M_{m,n}(\mathbb{R})$ el espacio de matrices $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$, sea $B^t = B^T$ la matriz traspuesta de B, y sea $tr(A)$ la traza de la matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, definida mediante $tr(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Probar que la traza define un producto escalar en $M_{m,n}(\mathbb{R})$ mediante $(A,B) := tr(B^t A)$.

12. Probar que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base ortonormal de $M_{2,2}(\mathbb{R})$, con producto escalar $(A,B) = tr(B^T A)$.

13. Sea $P(\mathbb{R})$ el espacio de polinomios sobre $\mathbb{R}$. Probar que $(f,g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$ define un producto escalar en $P(\mathbb{R})$.

14. Hallar el ángulo entre los vectores e_1 y $(1,1,1)$ en $\mathbb{R}^3$.

15. Sean $u = (z_1, z_2)$ y $v = (w_1, w_2)$ vectores en $\mathbb{C}^2$. Comprobar que $(u, v)_1 := z_1\overline{w_1} + (1 + i)z_1\overline{w_2} + (1 - i)z_2\overline{w_1} + 3z_2\overline{w_2}$ define un producto escalar en $\mathbb{C}^2$.

16. Calcular las normas de los vectores $u = (1 - i, 2 + 3i)$ y $v = (4 + 2i, 5 + i)$ con respecto al producto escalar habitual $(\cdot, \cdot)_h$ y con respecto al producto $(u, v)_1 := z_1\overline{w_1} + (1 + i)z_1\overline{w_2} + (1 - i)z_2\overline{w_1} + 3z_2\overline{w_2}$. Calcular también $(u, v)_h$ y $(u, v)_1$.

17. Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

$$\left(\int_{99\pi/200}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos x dx\right)^2 \leq \int_{99\pi/200}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^2 \, dx \int_{99\pi/200}^{\pi/2} (\cos x)^2 \, dx.$$