ALGEBRA I **Examen Final, Convocatoria Ordinaria** CURSO 2012/13

SOLUCIONES

APELLIDOS NOMBRE
DNI

INSTRUCCIONES: Entregar UNICAMENTE estas hojas. Cuando se pide en un apartado responder V (verdadero) o F (falso), responder *únicamente* V o F, marcando adecuadamente la opción elegida.
IMPORTANTE: Se prohibe el uso de calculadoras, libros, apuntes, teléfonos moviles, y en general, de toda la tecnología moderna (posterior al bolígrafo).
IMPORTANTE: En los problemas II, III y IV las respuestas deben justificarse adecuadamente.

INFORMACION: Los puntos asignados a las preguntas SI o NO son: respuesta correcta, 1 punto, respuesta incorrecta, - 1 punto, en blanco, 0 puntos. Valor mínimo de cualquier problema: 0 puntos.

I) 1) Ninguna aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^7$ es sobreyectiva. $\boxed{\text{V}}$ F

La imagen de una aplicación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^7$ *es un subespacio de* $\mathbb{R}^7$ *de dimensión* ≤ 3*, por lo tanto no puede ser todo* $\mathbb{R}^7$.

2) Si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^7$ es lineal, entonces $\dim Ker(T) + \dim Ran(T) = 7$, donde $Ker(T)$ y $Ran(T)$ denotan el núcleo y el rango (o imágen) de T, respectivamente. V $\boxed{\text{F}}$

$\dim Ker(T) + \dim Ran(T)$ *es igual a la dimensión del dominio de* T*, que es* 3.

3) Los espacios vectoriales $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ son isomorfos ($\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ denota el espacio de polinomios en una variable, con coeficientes complejos y grado $< n$). $\boxed{\text{V}}$ F

Ambos son espacios vectoriales complejos de dimensión n.

4) Multiplicación por un número complejo define una aplicación $\mathbb{R}$-lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. $\boxed{\text{V}}$ F

Si llamamos c este número complejo y identificamos $\mathbb{R}^2$ *con* $\mathbb{C}$*, obtemenos la aplicación* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto cz$*, que claramente es* $\mathbb{C}$*-lineal, y por lo tanto también* $\mathbb{R}$*-lineal.*

5) Multiplicación por un número complejo c define una aplicación $\mathbb{R}$-lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ cuyo determinante es $|c|^2$. $\boxed{\text{V}}$ F

Si el numero complejo es $c = a+ib$*, entonces la aplicación es* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, *que claramente tiene determinante* $|c|^2$.

6) Suponemos que los productos de matrices AB y BA están bien definidos. Entonces $tr(AB) = tr(BA)$, donde tr denota la traza. $\boxed{\text{V}}$ F

$Tr(AB) = \sum_i (AB)_{ii} = \sum_i(\sum_j A_{ij}B_{ji}) = \sum_j(\sum_i A_{ij}B_{ji}) = \sum_j(\sum_i B_{ji}A_{ij}) = \sum_j (BA)_{jj} = Tr(BA)$.

7) Suponemos que los productos de matrices AB y BA están bien definidos. Entonces $\det(AB) = \det(BA)$. V $\boxed{\text{F}}$

Toma $A = (1 \ \ 1)$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$*. Entonces* $AB = 2$*, mientras que* $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *tiene determinante cero.*

8) Suponemos que los productos de matrices AB y BA están bien definidos. Entonces AB es inversible si y solo si BA lo es. V $\boxed{\text{F}}$

Toma A, B como arriba.

9) Si una matriz tiene determinante positivo, entonces es diagonalizable. V $\boxed{\text{F}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *tiene determinante 1, pero no existe una base de $\mathbb{R}^2$ que consiste de autovectores de esta matriz.*

10) Si la matriz A es diagonal, 20×20, y satisface $A_{ii} > 0$ para todo i, entonces define un producto escalar $(x, y) := x^T Ay$ en $\mathbb{R}^{20}$. $\boxed{\text{V}}$ F

La aplicación $(\cdot, \cdot)$ es claramente bilineal y simétrica. Es definida positiva porque $A_{ii} > 0$ para todo i.

II) Sean
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Además, sean e_1, e_2, e_3 los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
1) (5 puntos) Encuentra explicitamente la matriz $Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ que corresponde, con respecto a la base canónica, a la aplicación lineal $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determinada por $S(e_1) = w_1$, $S(e_2) = w_2$, $S(e_3) = \vec{0}$.

La condición $S(e_1) = w_1$ implica que la primera columna de la matriz que buscamos es w_1. De manera similar, la segunda y tercera columna son w_2 y $\vec{0}$. Entonces la matriz que buscamos es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) (5 puntos) Encuentra explicitamente la matriz $Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ que corresponde, con respecto a la base canónica, a la aplicación lineal $R\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determinada por $R(v_1) = e_1$, $R(v_2) = e_2$, $R(v_3) = e_3$.

Primero hallamos la matriz que describe R^{-1}. Nota que $R^{-1}(e_1) = v_1$, $R^{-1}(e_2) = v_2$, $R^{-1}(e_3) = v_3$. Por lo tanto, argumentando como en 1), vemos la matriz que describe R^{-1} es $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz que describe R es su inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) (5 puntos) Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal determinada por $T(v_1) = w_1$, $T(v_2) = w_2$, $T(v_3) = \vec{0}$. Dar una base de la imagen de T.

La imagen es $Span\{w_1, w_2, \vec{0}\} = Span\{w_1, w_2\}$. *Como* $\{w_1, w_2\}$ *es una familia linealmente independiente, entonces es una base de la imagen de* T.

4) (5 puntos) Encuentra explicitamente la matriz $Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ que corresponde, con respecto a la base canónica, a la aplicación lineal T.

Tenemos $T = S \circ R$. *La matriz que describe* T *por lo tanto es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

III) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rrrr} 5x & -y & -2z = & 1 \\ -2x & +6y & -3z = & 3 \\ -2x & -y & +4z = & 10 \end{array}\right\}$$

a) (10 puntos) Escribir el sistema en forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y calcular las soluciones del sistema o justificar que no las tiene.

El sistema en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -2 & 6 & -3 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Resolvemos utilizando el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 4 & 10 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{28}{5} & -\frac{19}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & -\frac{7}{5} & \frac{16}{5} & \frac{52}{5} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{28}{5} & -\frac{19}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & 0 & \frac{45}{20} & \frac{225}{20} \end{array}\right).$$

Obtenemos $z = \frac{225}{45} = 5$. *De* $28y = 17+19\cdot 5 = 112$ *obtenemos* $y = 4$. *De* $5x = 4+10+1 = 15$ *obtenemos* $x = 3$.

En conclusión, la única solución es $x = 3, y = 4, z = 5$.

b) (10 puntos) Hallar una base para el núcleo (kernel) de la siguiente matriz; hallar también una base para su espacio de columnas: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 6 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Haciendo operaciónes de filas, llevamos la matriz a forma escalonada:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 6 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} := E_A$$

Para encontrar el núcleo de A, resolvemos el sistema homogeneo correspondente a la matriz E_A. Las variables libres son x_3 y x_5. Obtenemos $x_4 = 0$, $x_2 = -2x_3 - x_5$, y de $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ obtenemos $x_1 = -4x_3 - x_5$. Por lo tanto el nucleo es

$$\left\{ \begin{pmatrix} -4x_3 - x_5 \\ -2x_3 - x_5 \\ x_3 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix} : x_3, x_5 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3, x_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Una base del espacio de columnas de A consiste de las columnas de A correspondentes a las columnas de E_A que tienen pivotes, es decir, la primera, segunda y cuarta. Por lo tanto, ena base del espacio de columnas de A es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

IV) 1) (5 puntos) Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

A es una matriz triangular, entoces el determinante es el producto de los elementos en la diagonal: $det(A) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

2) (5 puntos) Encontrar los autovalores de la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculamos $det(B - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$, entonces los autovalores son 3 y -1.

3) (5 puntos) Encontrar un autovector para cada autovalor de B.

Recuerda que dado un autovalor λ de B, sus autovectores son todas las soluciones v de $(B - \lambda I)v = \vec{0}$, menos la solución trivial $v = \vec{0}$.
Para el autovalor 3: la soluciones de $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$ son exactamente los multiplos de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, por lo tanto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un autovector.
Para el autovalor -1: la soluciones de $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$ son exactamente los multiplos de $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, por lo tanto $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es un autovector.

4) (5 puntos) ¿ Es la matriz B diagonalizable?

Sí, es diagonalizable. Una razón es que existe una base de $\mathbb{R}^2$ que consiste de autovectores de B: la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ hallada en 3). Otra razón es que, por el teorema espectral, todas las matrizes (reales) simétricas son diagonalizables, y B es simétrica.