I) (5 puntos) Hallar el ángulo entre los vectores e_1 y $(1,1,1)$ en $\mathbb{R}^3$ (con el producto escalar habitual).

En general, dada un espacio vectorial V y un producto escalar en dicho espacio, se puede definir un ángulo entre dos vectores cualesquiera, siempre que no sean nulos. Dados dos vectores $u, v \neq 0$, la fórmula del ángulo comprendido entre ellos (que llamaremos α) viene dada por

$$\cos\alpha = \frac{(u,v)}{|u||v|},$$

donde $(\circ,\circ)$ representa el producto escalar y $|\circ|$ representa el módulo. Basta hacer las cuentas y despejar α:

$$(u,v) = \sqrt{1+0+0} = 1, \qquad |u| = \sqrt{1^2+0^2+0^2} = 1, \qquad |v| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}.$$

Por tanto, $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$, luego **el ángulo entre e_1 y $(1,1,1)$ es $\arccos(1/\sqrt{3})$.**

II) (5 puntos) Dado el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^2$, determinar si la familia de vectores $\{(1,1+2i),(i,-2+i)\}$ es una base de $\mathbb{C}^2$.

En primer lugar es importante tener claro cuál es la dimensión de $\mathbb{C}^2$, y esto depende con qué cuerpo de escalares estemos trabajando. Lo habitual, si no se indica lo contrario, es que dicho cuerpo sea $\mathbb{C}$, y en ese caso el espacio que estamos considerando tendría dimensión 2 y la base canónica sería $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$. Cualquier número complejo z se puede escribir como $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$, donde λ_1 y λ_2 son números complejos.
Por tanto, la familia de vectores del enunciado tiene el número adecuado de elementos para ser candidata a base. Para saber si efectivamente lo es, debe comprobarse si dicha familia es linealmente independiente y generadora. Si no lo es, basta con demostrar que no cumple una de las dos condiciones. En primer lugar vamos a analizar la dependencia o independencia lineal. Hay, básicamente, dos formas de hacerlo.

- La forma más sencilla en este caso es comprobar que uno de los vectores es combinación lineal del otro. O lo que es lo mismo, que uno de los vectores es igual al otro multiplicado por un escalar (complejo). Y esto se tiene, ya que $i \cdot (1, 1+2i) = (i, i-2)$. Esto prueba que no hay independencia lineal.
- La segunda forma es la más habitual, y es más eficaz para dimensiones mayores. Se trata de comprobar que el determinante formado al colocar los dos vectores en forma de matriz es cero. No importa el orden en que los coloquemos; el determinante será el mismo en todos las casos, salvo cambios de signo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+2i \\ i & -2+i \end{vmatrix} = 1\cdot(-2+i) - (1+2i)\cdot i = 0.$$

  Como el determinante es nulo, significa que al menos uno de los vectores que forman parte de la matriz es linealmente dependiente de los demás.

De cualquier de las dos maneras hemos demostrado que la familia no es linealmente independiente, y por tanto no puede ser una base. Una tercera forma de verlo, algo más complicada pero igualmente válida, consiste en demostrar que no son un sistema generador. Es decir, que hay vectores de $\mathbb{C}^2$ que no pueden expresarse como combinación lineal de estos dos:

- Como en este caso los dos que hay son proporcionales, basta tomar cualquiera que no sea un múltiplo de ellos para dar un contraejemplo. Consideremos por ejemplo el vector $(1,0)$. Vamos a intentar expresarlo como combinación lineal:

$$(1,0) = \lambda_1(1,1+2i) + \lambda_2(i,-2+i), \qquad \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

Separando por coordenadas, se obtiene un sistema de dos ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} 1 & = & \lambda_1 & + & i\lambda_2. \\ 0 & = & (1+2i)\lambda_1 & + & (-2+i)\lambda_2. \end{array} \right.$$

Para resolver el sistema, despejamos una de las incógnitas en función de la otra en la segunda ecuación, obteniendo

$$\lambda_2 = -\frac{1+2i}{-2+i}\lambda_1 = \frac{-1}{i}\lambda_1 = i\lambda_1.$$

Al sustituir λ_2 en la primera ecuación obtenemos

$$1 = \lambda_1 + i(i\lambda_1) = \lambda_1 - \lambda_1 = 0,$$

que no tiene solución, por lo que el sistema es incompatible. Esto implica que el vector $(1,0)$ no es expresable como combinación lineal de $(1, 1+2i)$ y $(i, -2+i)$; por lo que dicha familia de vectores no puede ser un sistema generador.

De cualquiera de estas tres formas se consigue probar que **esta familia no es una base de $\mathbb{C}^2$.**
Nota: Aún en el caso de que se considerase $\mathbb{R}$ como cuerpo de escalares en lugar de $\mathbb{C}$, lo cuál no es habitual ni se tiene salvo que así se indique explícitamente, la familia dada seguiría sin ser una base. El motivo es que el conjunto $\mathbb{C}^2$ sobre los escalares reales es un espacio vectorial, pero de dimensión 4 (su base canónica es $\{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$), y por tanto 2 vectores no son suficientes para ser un sistema generador.

III) (5 puntos) Sea $B_1 = \{e_1, e_2\}$ la base canónica del plano real $\mathbb{R}^2$, y sea $B_2 = \{v_1, v_2\}$ la base compuesta por los vectores $v_1 = (1,1)$ y $v_2 = (1,2)$. Hallar las coordenadas de e_1 y e_2 con respecto a B_2.

Por definición, las coordenadas de un vector $\vec{w}$ en la base B_2 son dos escalares $r, s \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{w} = r\vec{v_1} + s\vec{v_2}$. Dichas coordenadas son únicas, por ser B_2 una base. Empecemos con $e_1 = (1,0)$. Debemos resolver $(1,0) = r(1,1) + s(1,2) = (r,r) + (s,2s)$. Al ser un sistema relativamente sencillo, puede incluso tratar de resolverse mentalmente, quedando $r = 2, s = -1$. Si no, basta con separar las sumas por coordenadas y escribir la ecuación vectorial anterior como un sistema de dos ecuaciones;

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 1 & = & r+s \\ 0 & = & r+2s \end{array} \right.$$

Restando ambas obtenemos $s = -1$, y de ahí $r = 1 - s = 2$, como cabía esperar. Por tanto, **las coordenadas de e_1 con respecto de B_2 son $(2,-1)$.** Para e_2 procedemos de la misma forma, resolviendo ahora la ecuación $(0,1) = r(1,1) + s(1,2) = (r,r) + (s,2s)$. Nuevamente se puede o bien calcular las soluciones mentalmente, o escribir la ecuación en forma de sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & r+s \\ 1 & = & r+2s \end{array} \right.$$

Restando ambas, se obtiene $s = 1$ y de ahí, $r = -s = -1$. Luego **las coordenadas de e_2 con respecto de B_2 son $(-1,1)$.** Es interesante notar que, colocando los dos vectores obtenidos en forma de matriz se consigue la matriz de cambio de base entre B_2 y B_1.