Comentario Prob. 1: Los errores más frecuentes fueron olvidar ϕ y/o X.

Problema 1. (10 puntos) Halla el conjunto de partes de $X = \{1, 2, 3\}$.

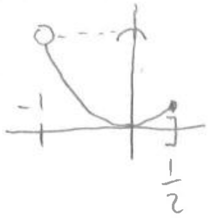
$\mathcal{P}(X) = \{ \phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, X \}$.

Problema 2. (10 puntos) Funciones.

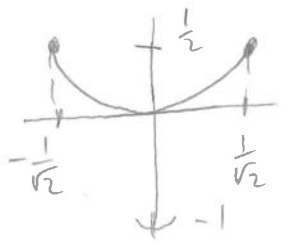
(a) Sea $f : X \to Y$ una función y sea $A \subset X$. Decide de manera razonada si es cierto en general que $f^{-1}(f(A)) = A$.

NO. Contraejemplo: sea $f: \mathbb{R} \to [-1,1]$ la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ y sea $A = [0, 2\pi]$. Entonces $f(A)$
$= \{\operatorname{sen} x : x \in A\} = [-1, 1]$, y $f^{-1}([-1,1])$
$= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [-1,1]\} = \mathbb{R}$

(b) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $g(x) = x^2$ y sea $B = (-1, 1/2]$. Halla $g(B)$ y $g(g^{-1}(B))$.



$g(B) = [0, 1)$,



$g^{-1}(B) = [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$

$g(g^{-1}[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]) =$
$= g([-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]) = [0, \frac{1}{2}]$

Comentarios: 1) $(1, \frac{1}{4}] = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \text{ y } x \leq \frac{1}{4}\} = \phi$.
Esta fue una respuesta bastante popular, y errónea.
$[\frac{1}{4}, 1)$ también es errónea: $g(0) = 0$. Como $0 \in B$,
$0 = g(0) \in g(B)$.
2) $g^{-1}(B)$ es un conjunto. La notación $g^{-1}(B)$ no significa que g^{-1} sea una función (sí es una relación). Tampoco significa $\frac{1}{g(B)}$. En general, dividir por un conjunto no tiene sentido.
3) Algunas personas respondieron a la parte a) "Sí, si f es inyectiva". Eso es correcto, pero no es lo que se pregunta.

Problema 3.

(a) (2 puntos) Sea X un conjunto. Define "R es una relación en X". Enuncia qué propiedades debe satisfacer una relación de equivalencia (basta nombrarlas).

* Una relación R en X es un subconjunto de $X \times X$.

* Una relación R es de equivalencia si cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

(b) (8 puntos) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$.

• Para $a, b \in \mathbb{R}$ consideramos la relación aR_1b si $f(a) = b$. Decide de manera razonada si R_1 es una relación de equivalencia, y en caso afirmativo, determina sus clases de equivalencia.

Observación. $a R_1 b \Leftrightarrow \underset{f(x)=x}{f(a)} = b \Leftrightarrow a = b$

. Reflexiva $\forall a \in \mathbb{R}$, $a R_1 a$ ya que $a=a$.

. Simétrica Si $a R_1 b$ entonces $b R_1 a$ ya que si $a=b$ entonces $b=a$.

. Transitiva Si $a R_1 b$ y $b R_1 c$ entonces $a R_1 c$ ya que $a R_1 b \Rightarrow a=b$ y $b R_1 c \Rightarrow b=c$. Luego $a=c$ y $a R_1 c$.

Conjunto cociente: $\mathbb{R}$, ya que para cada $r \in \mathbb{R}$, $[r]=\{r\}$.

• Para $a, b \in \mathbb{R}$ consideramos la relación aR_2b si $g(a) = b$. Decide de manera razonada si R_2 es una relación de equivalencia, y en caso afirmativo, determina sus clases de equivalencia.

$a R_2 b \Leftrightarrow g(a) = a^2 = b$; es decir $a R_2 b \Leftrightarrow a^2 = b$.

No es una relación de equivalencia porque no cumple la propiedad reflexiva: no es verdad que para todo $r \in \mathbb{R}$, $r^2 = r$.

Basta probar con $r=2$.