Convocatoria extraordinaria

9 de junio de 2017

APELLIDOS: ____________________

NOMBRE: ____________________ DNI/NIE: ____________ PROFESOR: ____________

Problema 1 (10 puntos). Decide justificadamente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones para cualesquiera subconjuntos $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, y cualquier función $f : X \to Y$.

(a) (5 puntos) $f(A^c) = f(A)^c$.

Falsa

Contraejemplo: $X = [-1, 1]$, $A = [-1, 0] \Rightarrow A^c = (0, 1]$

$Y = [0, 1]$. $f : X \longrightarrow Y$, $x \longmapsto x^2$ $\Rightarrow f(A^c) = (0, 1]$

$f(A)^c = Y \setminus f(A) = Y \setminus [0, 1] = \emptyset$

Luego, $\underbrace{f(A^c)}_{= (0,1]} \neq f(A)^c = \emptyset$

(b) (5 puntos) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.

Verdadera

Demostración: $f^{-1}(B^c) = \{x \in X : f(x) \in B^c\} = \{x \in X : f(x) \notin B\}$

$\| $

$(f^{-1}(B))^c = \{x \in X : x \notin f^{-1}(B)\} = \{x \in X : f(x) \notin B\}$

Problema 2 (10 puntos). Se considera la función $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, dada por

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

(a) (6 puntos) Halla la contraimagen (o preimagen) de $\{0\}$: $g^{-1}(\{0\})$.

Por definición, $g^{-1}(\{0\}) = \{n \in \mathbb{Z} : g(n) = 0\}$

- Si n es par, $g(n) = \frac{n}{2}$ y $\frac{n}{2} = 0 \Rightarrow \underline{n = 0}$
- Si n es impar, $g(n) = \frac{n-1}{2}$ y $\frac{n-1}{2} = 0 \Rightarrow \underline{n = 1}$

Luego, $g^{-1}(\{0\}) = \{0, 1\}$.

(b) (4 puntos) Estudia si g es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

- g es inyectiva si cada vez que $g(x) = g(y)$ se tiene que $x = y$. Como $g(0) = g(1) = 0$ y $0 \neq 1$, g no es inyectiva
- g es sobreyectiva si para cada $m \in \mathbb{Z}$, existe $n \in \mathbb{Z}$ con $g(n) = m$. Dado $m \in \mathbb{Z}$, basta observar que $g(2m) = m \Rightarrow g$ es sobreyectiva.

Como g <u>no</u> es inyectiva no puede ser biyectiva.

Problema 3 (10 puntos). En el conjunto $\mathbb{Z}$ se define la siguiente relación:

$n\mathcal{R}m$ si y sólo si $g(n) = g(m)$, siendo g la función del ejercicio anterior.

(a) (4 puntos) Demuestra que es una relación de equivalencia.

Para ello tenemos que comprobar si se cumplen las tres propiedades:

(1) Reflexiva: $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, ¿$nRn$? Basta observar que $g(n)=g(n)$ Luego se cumple.

(2) Simétrica ¿si nRm entonces mRn? Si nRm entonces, por definición de "R", $g(n)=g(m)$ por lo tanto $g(m)=g(n)$ y, de nuevo, por definición mRn. Luego se cumple

(3) Transitiva ¿si nRm y mRl entonces nRl? Si nRm entonces $g(n)=g(m)$; si mRl entonces $g(m)=$ $=g(l)$. Como $g(n)=g(m)=g(l)$ se tiene que $g(n)=g(l)$ y nRl. Se cumple

(b) (3 puntos) Halla la clase del 0: $cl(0)$.

Por definición: $cl(0)=\{n\in\mathbb{Z} : g(n)=g(0)\}$.

Como $g(0)=0$ se tiene que $cl(0)=\{g^{-1}(\{0\})\}$.

y por el ejercicio 2, (a), $cl(0)=\{0,1\}$.

(c) (3 puntos) Describe el conjunto cociente.

Para cada $n\in\mathbb{Z}$ se tiene que $[n]=\{m\in\mathbb{Z} : g(n)=g(m)\}$

- Si n es par y m también es par, entonces $nRm \Leftrightarrow$ $g(n)=g(m) \Leftrightarrow \frac{n}{2}=\frac{m}{2} \Leftrightarrow n=m$.
- Si n es par y m es impar, entonces $nRm \Leftrightarrow$ $g(n)=g(m) \Leftrightarrow \frac{n}{2}=\frac{m-1}{2} \Leftrightarrow n=m-1 \Leftrightarrow m=n+1$

Por lo tanto, $[n]=\{n, n+1\}$ (si n fuese impar: en argumentos similares probaríamos que $[n]=\{n, n-1\}$). Así, $\mathbb{Z}/_R=\{\overline{2k} : k\in\mathbb{Z}\}$ (Dos nº pares distintos nunca son equivalentes y cada impar es equivalente a un número par).

Problema 4. **(a) (15 puntos)** Encuentra todas las soluciones $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de la ecuación:

$$69x - 21y = -24.$$

$69x - 21y = -24 \iff 23x - 7y = -8$

Euclides: $23 = 7 \cdot 3 + 2 \Rightarrow 2 = 23 - 3 \cdot 7$

$7 = 2 \cdot 3 + 1 \Rightarrow 1 = 7 - 2 \cdot 3 = 7 - 3(23 - 3 \cdot 7)$

$= 7 - 3 \cdot 23 + 9 \cdot 7 = 23(-3) - 7(-10)$

Multiplicamos por -8:

$-8 = 23(24) - 7(80) = 23x - 7y$

Solución particular: $x_0 = 24$, $y_0 = 80$.

Todas las soluciones en enteros se obtienen sumando cero, es decir, queremos que

$23x - 7y = 0$, $23x = 7y \Rightarrow x = 7k$, $k \in \mathbb{Z}$, $y = 23k$. Por último, se nos pide todas las soluciones en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, no en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Por tanto, las soluciones deben ser no negativas.

Como $x = x_0 + 7k = 24 + 7k \geq 0 \iff k \geq -3$,

$y = y_0 + 23k = 80 + 23k \geq 0 \iff k \geq -3$,

la solución general es

$$\left.\begin{array}{l} x = 24 + 7k, \ k \in \mathbb{Z}, \ k \geq -3 \\ y = 80 + 23k, \ k \in \mathbb{Z}, \ k \geq -3. \end{array}\right\}$$

(b) (15 puntos) Resuelve en $\mathbb{Z}_{23}$ la ecuación $\overline{2022^{2017}}\bar{x} = \bar{2}$.

$$\begin{array}{r|l} 2022 & 23 \\ \cline{2-2} -184 & 87 \\ \hline 182 & \\ -161 & \\ \hline 21 & \end{array}$$

Luego $2022 \equiv 21 \equiv -2$ (23).

Como 23 es primo y $2022 \not\equiv 0$ (23), por el pequeño teorema de Fermat, $2022^{23-1} \equiv 1$ (23).

$$\begin{array}{r|l} 2017 & 22 \\ \cline{2-2} -198 & 91 \\ \hline 37 & \\ -22 & \\ \hline 15 & \end{array}$$

$$2022^{2017} = 2022^{91\cdot 22}\, 2020^{15} \equiv [-2]^{6+6+3} \quad (23)$$

$$[-2]^6 = [64] = [-69+64] = [-3\cdot 23+64] = [-5] \quad (23)$$

$$[-2]^{15} = [-5][-5][-8] = [2][-8] \quad (23)$$

$$[2][-8]X = [2] \iff [-8]X = [1] \quad (23)$$

$8\cdot 3 = 24 \equiv 1$ (23). Por tanto $X \equiv -3$

$\equiv 20$ (23).

Problema 5 (20 puntos). Consideramos los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t=0, \quad y+z+t=0\};$$

$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+2y+3z+4t=0\}.$$

(a) (10 puntos) Encuentra una base de $V \cap W$.

$V \cap W = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x+2y+3z+4t=0 \\ y+z+t=0 \end{array} \right\}$ Resolvemos el sistema homogéneo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} t=-2z \\ y=-2t-3z=z \\ x=-y-t-z=2z-2z=0 \end{array}$$

Tomando, p. ej., $z=1$, $V \cap W = \langle (0,1,-2,1) \rangle$

Base $= \{(0,1,-2,1)\}$

(b) (10 puntos) Halla de manera razonada una base de $V+W$.

$V = \{(x,y,z,t) : y=-z-t, \ x=-y-z-t = y-y=0\} = \{(0,-z-t,z,t ; z,t \in \mathbb{R}\}$
$= \{z(0,-1,1,0)+t(0,-1,0,1) : z,t \in \mathbb{R}\}$. Como esta suma es el vector $\overline{0} \Leftrightarrow z=0=t$, estos dos vectores forman una base, luego $\dim V = 2$. Del mismo modo,
$W = \{(x,y,z,t) : x=-2y-3z-4t, \ y,z,t \in \mathbb{R}\}$
$= \{(-2y-3z-4t, y, z, t) : y,z,t \in \mathbb{R}\}$
$= \{y(-2,1,0,0)+z(-3,0,1,0)+t(-4,0,0,1) ; y,z,t \in \mathbb{R}\}$
luego $\dim W = 3$. Ahora $\dim(V+W) = \dim V +$
$+ \dim W - \dim V \cap W = 2+3-1=4$, luego $V+W = \mathbb{R}^4$, así que basta escoger 4 vectores linealmente independientes, p. ej. $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

Problema 6 (20 puntos). Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) (7 puntos) Encuentra los autovalores de A.

$$0 = \left| A - \lambda I \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(\lambda^2-1) =$$

$$= (-1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1) \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda = -1 \text{ (doble)} \\ \lambda = 1 \text{ (simple)} \end{array}$$

(b) (7 puntos) Si existe, encuentra una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A.

$$Nuc(A - I) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = -z \\ y = 0 \end{array} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$Nuc(A + I) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = z \\ y \text{ libre} \end{array} \right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

$$\text{Base de } \mathbb{R}^3 \text{ de autovectores de } A = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = B$$

(c) (6 puntos) Describe una matriz diagonal D y una matriz invertible C tales que $A = CDC^{-1}$.

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C \text{ invertible}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} C^{-1}$$