Universidad Autónoma de Madrid — Álgebra. Curso 2016-17

Ingeniería Informática

# Segundo Parcial

**Miércoles, 21 de Diciembre de 2016**

**Apellidos** ______________________ **Nombre** ______________

**DNI** ______________________ **Grupo** ______________

| | | |
|---|---|---|
| | | |

**Problema 1.(20 puntos)** Sean $Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z=0\}$ y $Z = \langle (1,1,1),(0,0,1) \rangle$ dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$, donde $Z = \langle (1,1,1),(0,0,1) \rangle$ es el subespacio generado por los dos vectores dados.

(a) (4 puntos) Calcula una base para $Y$.

$Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z=0\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z = x+y\} =$

$= \{(x,y,x+y) : x,y\in\mathbb{R}\} = \{(x,0,x)+(0,y,y) : x,y\in\mathbb{R}\} =$

$= \{x(1,0,1)+y(0,1,1) : x,y\in\mathbb{R}\} = \langle(1,0,1),(0,1,1)\rangle$

Luego los vectores $(1,0,1)$ y $(0,1,1)$ generan $Y$. Como además son l.i. porque la ecuación $\lambda(1,0,1)+\beta(0,1,1) = (0,0,0)$ sólo tiene solución $\lambda=\beta=0$ se tiene que $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ es una base de $Y$.

(b) (4 puntos) Escribe $Z$ como el conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo.

$(x,y,z) \in Z \iff \exists\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ con:

$$\alpha(1,1,1)+\beta(0,0,1) = (x,y,z) \iff$$

el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = x\\ \alpha = y\\ \alpha+\beta = z\end{array}\right\} \text{ tiene solución} \iff rg\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\1&1\end{pmatrix} = rg\left(\begin{array}{cc|c}1&0&x\\1&0&y\\1&1&z\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&0&x\\1&0&y\\1&1&z\end{array}\right) \xrightarrow[3^a=3^a-1^a]{2^a=2^a-1^a} \left(\begin{array}{cc|c}1&0&x\\0&0&y-x\\0&1&z-x\end{array}\right) \xrightarrow{2^a\leftrightarrow3^a} \left(\begin{array}{cc|c}1&0&x\\0&1&z-x\\0&0&y-x\end{array}\right)$$

$\Rightarrow rg\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\1&1\end{pmatrix} = 2$ y $rg\left(\begin{array}{cc|c}1&0&x\\0&1&z-x\\0&0&y-x\end{array}\right) = 2 \Rightarrow y-x=0 \Rightarrow$

$Z = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y-x=0\}$

**(c) (4 puntos)** Decide de manera razonada por qué $Y \cap Z \neq \{\vec{0}\}$. Da una base para $Y \cap Z$.

$$\dim(Y+Z) = \underset{\substack{\parallel \\ 2}}{\dim Y} + \underset{\substack{\parallel \\ 2}}{\dim Z} - \dim(Y \cap Z)$$

Como $\dim(Y+Z) \leq 3 \Rightarrow \dim(Y \cap Z) > 0$

$\Rightarrow \exists\, u \in Y \cap Z$ con $u \neq \vec{0}$.

También vale observar que, por ejemplo, el vector $(1,1,2) \in Y \cap Z$.

**(d) (4 puntos)** Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por $T(x,y,z) = (2x, y+z)$. Demuestra que $T$ es lineal.

Hay que probar 2 cosas:

(1º) $\forall\, u,v \in \mathbb{R}^3$, ¿$T(u+v) = T(u) + T(v)$?

Sean $u = (a,b,c)$ y $v = (a',b',c')$

$T(u+v) = T(a+a', b+b', c+c') = (2(a+a'), b+b'+c+c') =$

$= (2a, b+c) + (2a', b'+c') = T(u) + T(v)$.

(2) $\forall u \in \mathbb{R}^3$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, ¿$T(\alpha u) = \alpha T(u)$? Sea $u = (a,b,c)$

$T(\alpha u) = T(\alpha(a,b,c)) = T(\alpha a, \alpha b, \alpha c) = (2\alpha a, \alpha b + \alpha c) =$

$= \alpha(2a, b+c) = \alpha T(u)$.

**(d) (4 puntos)** Sean $B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y $B_2 = \{(1,0),(0,1)\}$. Escribe la matriz de $T$ con respecto a las bases $B_1$ y $B_2$.

$[T((0,1,0))]_{B_2}$

$$M(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$[T((1,0,0))]_{B_2}$ $\qquad$ $[T((0,0,1))]_{B_3}$

**Problema 2. (20 puntos)** Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

**(a) (10 puntos)** Halla los autovalores de $A$, y decide razonadamente si $A$ es diagonalizable. En caso de respuesta afirmativa, encuentra una matriz $D$ que diagonalice a $A$.

A es diagonalizable porque es real y simétrica,
o porque tiene 2 autovalores distintos, 1 y 3,
o porque somos capaces de hallar P t.q.
$A = PDP^{-1}$.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-1)(\lambda+3) = 0$$

Autovalores: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**(b) (10 puntos)** Halla los autovectores asociados a los autovalores del apartado (a). En caso de que exista, encuentra una matriz $P$ tal que $A = PDP^{-1}$ (no se pide hallar $P^{-1}$).

Para $\lambda_1 = 1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow x = -y.$$

Tomamos $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, p. ej.

Para $\lambda_2 = 3$,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y.$$ Tomamos $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, p. ej.

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$