Universidad Autónoma de Madrid — Álgebra. Curso 2016-17

Ingeniería Informática

Segundo Parcial

Miércoles, 16 de Noviembre de 2016

Apellidos ______________________ **Nombre** ______________

DNI ______________________ **Grupo** ______________

Problema 1. (10 puntos) Decide razonadamente si la congruencia $12x \equiv 6$ (33) tiene soluciones, y en caso de respuesta afirmativa, hallarlas todas.

Primero hallamos una solución particular de
$12x \equiv 6 \ (33)$, o equivalentemente, de
$4x \equiv 2 \ (11)$, o " , de
$2x \equiv 1 \equiv 12 \ (11)$, o " , de
$x \equiv 6 \ (11)$. En $\mathbb{Z}_{11}$ es la única solución; en
$\mathbb{Z}_{33}$ hay 2 más, $6+11=17$ y $6+11+11=28$

Comentarios: 1) La primera equivalencia es cierta porque
hallar una solución de $12x+33y=6$ es equivalente
a " " " " $4x+11y=2$, y a " "
" " " " $4x \equiv 2 \ (11)$.
La segunda y la tercera equivalencias son ciertas
porque 2 es una unidad en $\mathbb{Z}_{11}$, es decir, tiene inverso multiplicativo.

2) La respuesta $x=6+11t$, $t \in \mathbb{Z}$ es incorrecta,
porque no hay infinitas soluciones, hay 3.
La respuesta $x=6+11t$, $t \in \mathbb{R}$ es aún
peor, porque si $t=\sqrt{2}$, p.ej. ó $\frac{1}{3}$, x ni
siquiera es un entero.

Problema 2. (a) **(5 puntos)** Determina cuántas unidades tiene $\mathbb{Z}_{120}$, justificando la respuesta.

El nº de unidades de $\mathbb{Z}_{120}$ es el nº de restos módulo 120 que son coprimos con 120. Este número lo da la función ϕ- de Euler: $\phi(120) = \phi(2^3 \cdot 3 \cdot 5) =$

$= \phi(2^3) \cdot \phi(3) \cdot \phi(5) = (2^3 - 2^2) \cdot 2 \cdot 4 = \underline{32}.$ $2^3, 3, 5$ son coprimos

(a) **(5 puntos)** Halla el resto al dividir 7^{32002} por 120.

Como $\text{mcd}(7, 120) = 1$, podemos usar el teorema de Euler-Fermat que, en este caso dice que:

$7^{\phi(120)} \equiv 1 \mod (120)$; es decir: $7^{32} \equiv 1 \mod (120)$.

Así: $7^{32002} \equiv (7^{32})^{1000} \cdot 7^2 \equiv 7^2 \equiv 49 \mod (120)$

Luego el resto que se pide es 49.

Problema 3. (10 puntos) Escribe el siguiente sistema de ecuaciones en forma matricial, y resuélvelo utilizando el método de reducción de Gauss.

$$\left.\begin{array}{rcrl} 2x & + & 6y & = 3 \\ 3x & - & y & = 1 \end{array}\right\}$$

Forma matricial: $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gauss: Buscamos una forma escalonada de la matriz de coeficientes del sistema:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \to 2 \cdot F_2 - 3F_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 3 \\ 0 & -20 & -7 \end{array}\right) \underset{F_2 \to -F_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 20 & 7 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ El sistema de ecuaciones original tiene las mismas soluciones que el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 6y = 3 \\ 20y = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 7/20$$

$$x = \left(3 - 6\left(7/20\right)\right)\frac{1}{2} = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$$

Solución: $\boxed{x = 9/20,\ y = 7/20}$