Examen Final Enero

Miércoles, 11 de enero de 2017

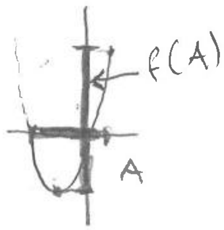
Apellidos ______________________ **Nombre** ______________
DNI ______________________ **Grupo** ______________

Problema 1. (10 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = x^2 + 4x$.

(a) **(5 puntos)** Sea $A = (-4, 1]$. Halla $f(A)$. $f'(x) = 2x + 4 = 0 \iff x = -2$,

La gráfica de f es una parabola convexa, cuyo valor mínimo ocurre en $x=-2$, y el máximo, en uno de los extremos. $f(-4) = 16 - 16 = 0$, $f(-2) = 4 - 8 = -4$, $f(1) = 1 + 4 = 5$

$$f((-4,1]) = \{f(x) : x \in (-4,1]\} = [-4,5]$$



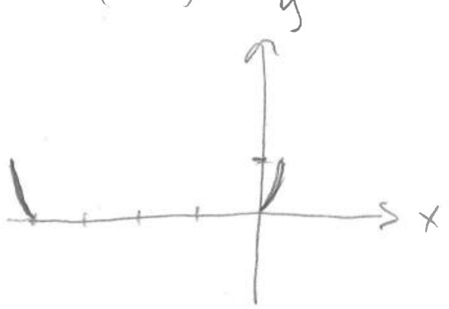
(b) **(5 puntos)** Sea $B = [0, 1]$. Calcula $f^{-1}(B)$. $f^{-1}([0,1]) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [0,1]\}$

Resolvemos $x^2 + 4x = 1$ y $x^2 + 4x = 0$

$$x^2 + 4x - 1 = 0 \iff x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

$$x^2 + 4x = 0 \iff x = 0, -4$$

$$f^{-1}(B) = f^{-1}([0,1]) = [-2-\sqrt{5}, -4] \cup [0, -2+\sqrt{5}]$$



Problema 2. (10 puntos) En $\mathbb{Z}$ se considera la siguiente relación $\mathcal{R}$: decimos que $x\mathcal{R}y$ si existe un entero k tal que $x + 15k = y$.

(a) (5 puntos) Demuestra que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

1) Reflexividad: $x = x + 15K$ con $K = 0 \in \mathbb{Z}$, luego $x R x$.

2) Simetría: Si existe una $K \in \mathbb{Z}$ t.q. $x + 15K = y$, entonces $y + 15(-K) = x$, $-K \in \mathbb{Z}$, luego $xRy \Rightarrow yRx$.

3) Transitividad: Supongamos que xRy e yRz. Entonces $\exists K_1, K_2 \in \mathbb{Z}$ t.q. $x + 15K_1 = y$ e $y + 15K_2 = z$, luego

$x + 15(K_1 + K_2) = y + 15K_2 = z$, $K_1 + K_2 \in \mathbb{Z}$.

Luego xRz.

(b) (5 puntos) Describe el conjunto cociente $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.

$$\mathbb{Z}/R = \mathbb{Z}_{15} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}\}$$

Problema 3. (10 puntos) Aritmética de enteros.
(a) **(5 puntos)** Calcula todas las soluciones de la ecuación $\overline{3}x = \overline{12}$ en $\mathbb{Z}_{15}$.

$3X \equiv 12 \pmod{15}$. Dividiendo por 3 para simplificar, obtenemos
$X \equiv 4 \pmod 5$, y esa es la única solución mod 5. Mod 15 hay 2 más,
$4+5=9$ y $9+5=14$. De modo que todas las soluciones en $\mathbb{Z}_{15}$ son $\overline{4}$, $\overline{9}$ y $\overline{14}$.

(b) **(5 puntos)** Calcula el resto de 77^{80001} después de dividir por 30.

m.c.d. $(77, 30) = 1$, luego el Teorema de Euler es aplicable: $a^{\phi(30)} \equiv 1 \pmod{30}$.
$\phi(30) = \phi(2)\phi(3)\phi(5) = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$.
Notesé que nos piden el resto, es decir, un número $r \in [0, 30)$.

$77^{80001} = 77^{80000+1} = (77^8)^{10000} \cdot 77$
$\equiv 1^{10000} \cdot 77 \pmod{30}$
$\equiv 77 \pmod{30} \equiv 17 \pmod{30}$
porque $77 = 2 \cdot 30 + 17$. Luego

$r = 17$.

Problema 4. (16 puntos) Sean $Y = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y = z\}$ y $Z = \langle(1, 1, 2, 1), (0, 0, 1, 1)\rangle$ dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$, donde $Z = \langle(1, 1, 2, 1), (0, 0, 1, 1)\rangle$ es el subespacio generado por los dos vectores dados.

(a) **(4 puntos)** Calcula una base para Y.

$Y = \{(x, x, x, t) : x, t \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1,1,1,0) + t(0,0,0,1) : x, t \in \mathbb{R}\}.$

Base $= \{(1,1,1,0), (0,0,0,1)\}$

(b) **(4 puntos)** Escribe Z como el conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo.

$v \in Z \iff \exists\, a, b \in \mathbb{R}$ t.q.

$v = (x, y, z, t) = a(1,1,2,1) + b(0,0,1,1).$

Queremos ver que condiciones deben satisfacer x, y, z, t para que existan soluciones a, b:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & y \\ 2 & 1 & z \\ 1 & 1 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & y-x \\ 0 & 1 & z-2x \\ 0 & 1 & t-x \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & t-x \\ 0 & 1 & z-2x \\ 0 & 0 & y-x \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & t-x \\ 0 & 0 & z-x-t \\ 0 & 0 & y-x \end{array}\right)$$

Las dos primeras filas no imponen condiciones: para todos los valores de x y de $t-x$ siempre hay soluciones únicas a, b.

Sistema homogeneo:

$$\left.\begin{array}{l} z - x - t = 0 \\ y - x = 0 \end{array}\right\}$$

Para que existan soluciones a, b es necesario que se satisfagan estas igualdades.

(c) (4 puntos) Da una base para $Y + Z$. Podemos poner los vectores generadores como filas de una matriz. Como las operaciones elementales con filas no cambian el espacio de filas, podemos escoger las filas con pivotes tras poner la matriz en forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una base es $\{(1,1,2,1), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}$

Alternativamente podemos poner los vectores como columnas y reducir la matriz a forma escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OJO, escogemos las columnas 1, 2 y 4 de la matriz original, porque las operaciones con filas pueden cambiar el espacio de columnas.

Base $= \{(1,1,1,0), (1,1,2,1), (0,0,0,1)\}$

(d) (4 puntos) Decide de manera razonada cuál es la dimensión de $Y \cap Z$.

$\dim(Y+Z) = 3$, porque tenemos una base con 3 elementos.

$\dim(Y+Z) + \dim(Y \cap Z) = \dim Y + \dim Z$

$\Rightarrow 3 + \dim(Y \cap Z) = 2 + 2 \Rightarrow \dim(Y \cap Z) = 1$.

Alternativamente, se puede demostrar que cualquier base de $Y \cap Z$ contiene un sólo vector, pero esto requiere hallar una base.

Problema 5. (14 puntos) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

(a) **(5 puntos)** Demuestra que -1 y -2 son autovalores de A.

Basta probar que $\det(A - \lambda I) = 0$ para $\lambda = -1, -2$.

$\underline{\lambda = -1}$ $\quad \det \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\underline{\lambda = -2}$ $\quad \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0.$

(b) **(5 puntos)** Halla una base de autovectores asociados a los autovalores del apartado (a).

Resolvemos: $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ para $\lambda = -1, -2$.

$\underline{\lambda = -1}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y + 2z = 0$

Solución: $\langle (1,1,0), (2,0,-1) \rangle$

$\underline{\lambda = -2}$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ -x - z = 0 \end{array} \right.$

Solución: $\langle (1, 0, -1) \rangle$

Base de autovectores: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

(b) **(4 puntos)** Calcula A^{10}.

Por (a) y (b):

$$A = P \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{D} P^{-1} = P D P^{-1}$$

$$y \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Así: $\quad A^{10} = P\, D^{10}\, P^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ +1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2^{10} & 2^{10} & -2^{11} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-2^{10} & -1+2^{10} & 2-2^{11} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1+2^{10} & 1-2^{10} & -1+2^{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1022 & 1023 & -2046 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1023 & -1023 & 2047 \end{pmatrix}.$$