

ÁLGEBRA

Hoja 7: Autovalores, autovectores y diagonalización

1. Hallar los autovalores reales y los autovectores en \mathbb{R}^n de las siguientes matrices:

$$\begin{aligned} a) & \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} & b) & \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} & c) & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ d) & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & e) & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & f) & \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ g) & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & h) & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} & i) & \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Además, en los casos en los que sea posible, hallar una base de \mathbb{R}^n formada por autovectores.

2. Encontrar los autovalores y los autovectores de las aplicaciones lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n dadas por las siguientes matrices:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Diagonalizar las siguientes matrices en los casos que sea posible:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Diagonalizar si es posible las siguientes matrices A y C calculando matrices de cambio de base.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Dada $A = \begin{pmatrix} 5/2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, calcular A^{1438} y $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$.

6. Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, calcular A^{2016} .

7. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ b & d & 1 & 0 \\ c & e & f & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinar los valores propios de A .

b) Discutir las condiciones que deben cumplir a, b, c, d, e, f para que A sea diagonalizable.

c) En las condiciones para las que A es diagonalizable, obtener los subespacios propios asociados a los dos valores propios existentes.

d) Calcular la matriz de cambio de base a forma diagonal.

8. Demostrar o dar un contraejemplo para decidir la veracidad de las siguientes afirmaciones.

a) Toda matriz invertible es diagonalizable (sugerencia, buscar un contraejemplo).

b) Si A es diagonalizable, entonces A^n es diagonalizable para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

c) Si A y B son diagonalizables, entonces $A + B$ y AB son diagonalizables (sugerencia, buscar contraejemplos).

9. Determinar para qué valores de a y b en \mathbb{R} la matriz $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable en \mathbb{R} .

10. Estudiar para qué valores de c la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 - c \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

11. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal que verifica:

a) $T(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$ y

b) 2 y 3 son valores propios de T .

¿Es T diagonalizable?

12. Encontrar los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sea diagonalizable sobre \mathbb{R} .