ÁLGEBRA

Hoja 6: Espacios vectoriales y aplicaciones lineales

1. Se considera el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$.

i) ¿Son los vectores $(1,2,3),(1,1,1)$ combinación lineal del sistema $S=\{(1,0,1),(0,2,2)\}$?

ii) Calcular x e y, si es posible para que el vector $(1,2,x,y)$ sea combinación lineal de los vectores $(1,2,0,2)$ y $(1,1,2,3)$.

2. Estudiar si las siguientes familias de vectores del espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes.

a) $\{(1,2,1),(1,0,1),(2,3,2)\}$.

b) $\{(1,0,0),(2,1,1),(0,1,1),(1,-1,-1)\}$.

3. Decide si el vector $(1,0,1,0)$ es combinación lineal del sistema $\{(1,1,0,1),(1,0,1,1),(1,0,0,-1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

4. Estudiar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$.

a) $A=\{(3x_2,x_2,x_4+x_2,x_4) \mid x_2,x_4 \in \mathbb{R}\}$.

b) $B=\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_1 \cdot x_2 = 0\}$.

c) $C=\{(x_1,x_2,x_1,x_2) \mid x_1 = 1\}$.

d) $D=\{(x_1,x_1,x_1,x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$.

e) $E=\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_1=t, x_2=t, x_3=2t, x_4=5t, t \in \mathbb{R}\}$.

5. Sea $\mathbb{S}$ el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $\{(1,2,1),(1,0,1),(2,3,2)\}$. Expresa a $\mathbb{S}$ como el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo.

6. Halla una base y calcula la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales.

a) $\mathbb{S}_1 \subseteq \mathbb{R}^4$ definido por: $\left\{\begin{array}{l} x_1-x_2+x_3-x_4=0 \\ x_1-x_2=0 \\ x_3-x_4=0 \\ x_1-x_4=0 \end{array}\right.$

b) $\mathbb{S}_2 \subseteq \mathbb{R}^4$ definido por: $\left\{\begin{array}{l} x_1-x_2+x_3-x_4=0 \\ x_1-x_2-2x_3-x_4=0 \end{array}\right.$

7. Halla una base de los siguientes subespacios vectoriales:

a) $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}^4$ generado por el conjunto de vectores $\{(1,-1,0,0),(2,0,-1,-1),(1,0,0,-1),(1,-1,1,-1)\}$.

b) $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ generado por $\{(1,-1,0),(1,0,-1),(2,-1,-1),(-1,-1,2)\}$.

8. Sea U el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $(1,1,-1,2)$ y $(-1,2,3,3)$. Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $(1,7,3,12)$ y $(-4,5,1,1)$. Sea $W=U+V$.

a) Halla una base de W.

b) Halla un sistema ecuaciones de W con el menor número de ecuaciones.

c) Demuestra que $(2,-3,5,7) \notin W$.

d) Demuestra que el vector $w=(27,0,27,57)$ está en W. Halla $u \in U$ y $v \in V$ tales que $w=u+v$.

9. Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ los subespacios de $\mathbb{R}^4$ del ejercicio 6.

a) Halla una base de $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$ y de $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$. Comprueba la fórmula de las dimensiones.

b) Halla un sistema ecuaciones de $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$ y de $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$ con el menor número de ecuaciones.

10. Sea $a \in \mathbb{R}$. Sean U y V los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$U: \left.\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \end{array}\right\} \qquad V: \left.\begin{array}{rcl} 3x_1 + x_2 + 2x_4 & = & 0 \\ -x_1 + x_3 + ax_4 & = & 0 \end{array}\right\}$$

a) Halla los valores de a para los que $U \cap V \neq \{0\}$. Para esos valores, calcula una base de $U \cap V$ y un sistema de ecuaciones de $U \cap V$ con el menor número de ecuaciones.

b) Para $a = -4$, halla $u \in U$ y $v \in V$ tales que $(3, 1, -2, 2) = u + v$.

11. Estudiar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales entre los espacios vectoriales dados. Para aquellas que sean lineales escribe la aplicación en forma matricial:

a) $f_1 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f_1(v) = \lambda_0 v$ con $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ fijo.

b) $f_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f_2(v) = v_0 - v$ con $v_0 \in \mathbb{R}^3$ fijo.

c) $f_3 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f_3(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 1, x_3)$.

d) $f_4 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f_4(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - x_2^2, 0, 0)$.

e) $f_5 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f_5(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_3)$.

f) $f_6 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f_6(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_3)$.

12. Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Halla la matriz de f sabiendo que:

a) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$, $f(1, 0) = 2$, $f(0, 1) = 1$.

b) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^2$, $f(1, 0) = (2, 0)$, $f(0, 1) = (1, 1)$.

13. Decide en cada caso si existe o no una aplicación lineal con las propiedades que se indican.

a) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(1, -1, 1) = (1, 0)$ y $T(1, 1, 1) = (0, 1)$.

b) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(\alpha_i) = \beta_i \ (i = 1, 2, 3)$ con
$\alpha_1 = (1, -1),\ \alpha_2 = (2, -1),\ \alpha_3 = (-3, 2),\ \beta_1 = (1, 0),\ \beta_2 = (0, 1)$ y $\beta_3 = (1, 2)$.

14. Se consideran las aplicaciones lineales $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_3)$ y $g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_3)$.

a) Siendo V el subespacio $\langle (1, -1, 0), (1, 1, 1) \rangle$ calcular $f(V)$ y $g(V)$. Calcular también $f^{-1}(0, 0, 0)$ y $f^{-1}(2, 2, 1)$.

b) Calcular $f^{-1}(W)$, siendo $W = \{(x_1, x_2, x_3) \colon x_1 = 3\lambda,\ x_2 = 2\lambda,\ x_3 = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

15. Las siguientes matrices determinan aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ para diferentes $n, m > 0$. Para cada una de ellas, halla una base del núcleo, las ecuaciones de la imagen y comprueba la fórmula de las dimensiones (n = dimensión del núcleo + dimensión de la imagen).

$$i)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};\quad ii)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};\quad iii)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix};\quad iv)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};\quad v)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$vi)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\quad vii)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\quad viii)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};\quad ix)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix};\quad x)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

16. Comprobar que no existe ninguna matriz 2x2 P inversible tal que $D = PAP^{-1}$, donde D es diagonal y

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$