ÁLGEBRA

Hoja 5: Sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes

1. Aplica el método de Gauss para discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

$$a)\ \left.\begin{aligned} x_2-3x_3&=-5\\ 2x_1+3x_2+3x_3&=7\\ 4x_1+5x_2-2x_3&=10\end{aligned}\right\} \qquad b)\ \left.\begin{aligned} 3x_1-10x_2-x_3&=-15\\ 2x_1+2x_2+3x_3&=6\\ x_1+14x_2+7x_3&=-1\end{aligned}\right\} \qquad c)\ \left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=2\\ -x_1+x_2+x_3&=1\\ -x_1+3x_2+3x_3&=4\end{aligned}\right\}$$

$$d)\ \left.\begin{aligned} 2x_1-2x_2+x_3&=9\\ 3x_1-5x_2+2x_3&=4\\ 3x_1+3x_2-x_3&=9\end{aligned}\right\} \qquad e)\ \left.\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3&=7\\ 3x_1+2x_2-x_3&=1\\ 2x_1-5x_2+2x_3&=6\end{aligned}\right\} \qquad f)\ \left.\begin{aligned} x_1-3x_2+2x_3&=0\\ -x_1-2x_2+2x_3&=0\\ 2x_1-2x_3&=0\end{aligned}\right\}$$

$$g)\ \left.\begin{aligned} x+y+z+t&=0\\ y-z&=5\\ x+z+2t&=1\\ x+2y&=0\end{aligned}\right\} \qquad h)\ \left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3&=2\\ x_1-x_2+x_3&=0\\ x_1+3x_2-x_3&=-2\\ 3x_1+4x_2+3x_3&=0\end{aligned}\right\} \qquad i)\ \left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=0\\ -x_1+x_2+9x_4&=0\\ -x_1-3x_2+2x_3+3x_4&=0\\ -x_1+2x_2-5x_3+2x_4&=0\end{aligned}\right\}$$

Solución: a) $\left(\frac{67}{11},-\frac{28}{11},\frac{9}{11}\right)$; b) incompatible; c) $\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}-\alpha,\alpha\right)|\alpha\in\mathbb{R}\right\}$; d) $(1,13,33)$; e) $(2,8,21)$; f) $(0,0,0)$; g) $(-8,4,-1,5)$; h) $(-1,0,1)$; i) $\{(59\alpha,-22\alpha,-17\alpha,9\alpha)\,|\alpha\in\mathbb{R}\}$.

2. Cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones tiene dos términos independientes. Resuélvelos a la vez mediante el método de Gauss.

$$a)\ \left.\begin{array}{rcr|r} 2x_1-4x_2 &=& 10 & -8\\ x_1-3x_2+x_4 &=& -4 & -2\\ x_1-x_3+2x_4 &=& 4 & 9\\ 3x_1-4x_2+3x_3-x_4 &=& -11 & -15\end{array}\right\} \qquad b)\ \left.\begin{array}{rcr|r} 2x_1-4x_2 &=& 10 & -8\\ x_1-3x_2 &=& -4 & -2\\ x_1-x_3 &=& 4 & 9\\ 4x_1-7x_2-x_3 &=& 10 & -15\end{array}\right\}$$

$$c)\ \left.\begin{array}{rcr|r} 2x_1-4x_2 &=& 10 & -8\\ x_1-3x_2+x_4 &=& -4 & -2\\ x_1-x_3+2x_4 &=& 4 & 9\end{array}\right\}$$

Solución: a) $\left(\frac{97}{13},\frac{16}{13},-\frac{157}{13},-\frac{101}{13}\right)$ y $(0,2,-1,4)$; b) $(23,9,19)$ e incompatible;
c) $\{(23+2\alpha,9+\alpha,19+4\alpha,\alpha)\,|\alpha\in\mathbb{R}\}$ y $\{(-8+2\alpha,-2+\alpha,-17+4\alpha,\alpha)\,|\alpha\in\mathbb{R}\}$.

3. Aplica el método de Gauss para calcular, si existe, la inversa de las siguientes matrices.

$$a)\ \begin{pmatrix}1&3&-2\\2&5&-3\\-3&2&-4\end{pmatrix}, \qquad b)\ \begin{pmatrix}1&3&-2\\2&5&-3\\3&8&-5\end{pmatrix}.$$

4. Calcula A^2, A^3, A^4 para

$$a)\ A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, \qquad b)\ A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Generaliza el resultado calculando A^n para $n\in\mathbb{N}$. (*Sugerencia*: intenta inferir el posible valor de A^n y demuéstralo por inducción).

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcula los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para los que se cumple la igualdad $A^2 + \alpha A + \beta I_2 = 0$, donde I_2 y 0 son respectivamente la matriz identidad y matriz nula, de orden dos.

6. Demuestra que la suma de matrices simétricas es simétrica. ¿Es el producto de matrices simétricas una matriz simétrica en general?

7. Una matriz $A \in \mathbb{M}_n$ se llama *idempotente* si $A^2 = A$. Demuestra lo siguiente:

a) La matriz $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ es idempotente.

b) Si A es idempotente, entonces $I_n - A$ es idempotente (I_n es la matriz identidad de orden n).

c) Si A es idempotente, entonces $(I_n - A)A = A(I_n - A) = 0$.

d) Si A es idempotente e invertible entonces A es la matriz identidad.

8. Calcula los siguientes determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \qquad b) \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \qquad c) \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} \qquad d) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$e) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Solución: a) 63; b) 0; c) $(x-a)^3(3a+x)$; d) 5; e) $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}$.

9. Halla los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ que sean soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

e) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ -2 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$

10. Discute los siguientes sistemas de ecuaciones en función de los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$a)\quad \left.\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array}\right\} \qquad b)\quad \left.\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & & & = & ax \\ 5x & + & y & + & 2z & = & ay \\ & & 4y & + & 3z & = & az \end{array}\right\}$$

11. Discute el siguiente sistema de ecuaciones en función de los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & ay & + & bz & = & 4 \\ x & & & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}\right\}$$