

ÁLGEBRA

Hoja 4: Congruencias

1. Sea $p \in \mathbb{Z}$ con $p \geq 2$. Demostrar que p es primo si y sólo si la siguiente condición se cumple: $p|ab$ implica que $p|a$, ó $p|b$.
2. Si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$ es la descomposición en factores primos de n . ¿Cuántos divisores positivos tiene n ?
3. Sean a, b, m números naturales con a y b primos entre sí. Demuestra que si $a|m$ y $b|m$ entonces $ab|m$. Encuentra un contraejemplo que muestre que si a y b no son primos entre sí el resultado no es cierto en general.
4. Sea $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{N}$.
5. Dados m enteros consecutivos: $n, n+1, n+2, \dots, n+(m-1)$, con $m > 1$, demuestra que uno y solamente uno es divisible por m .
6. Hallar $r \equiv k \pmod{n}$, con $0 \leq r < n$, y con $-n < r \leq 0$, en los siguientes casos: $k = 41, n = 20$, $k = 15002, n = 15$, $k = 121, n = 15$, $k = 13^2, n = 11$, $k = 3^3, n = 14$.
7. Calcula el resto de dividir 6^{234} entre 13.
8. Calcula el resto de dividir 15^{2098} entre 14.
9. Demuestra que el entero $5^{31} - 5$ es múltiplo de 7.
10. Halla el resto de $15002^{8003} + 11^8$ al dividirlo por 15.
11. Demuestra que el entero $13^{232} - 15$ es múltiplo de 11.
12. Demuestra que 14 divide a $9(3^{611} - 5^{25})$.
13. Halla las unidades de \mathbb{Z}_7 e indica cuál es el inverso multiplicativo de cada uno de sus elementos.
14. Halla las unidades de \mathbb{Z}_8 e indica cuál es el inverso multiplicativo de cada uno de sus elementos.
15. Halla los inversos multiplicativos de $\overline{13}$ y de $-\overline{15}$ en \mathbb{Z}_{23} y en \mathbb{Z}_{31} .
16. Halla todas las soluciones de las ecuaciones siguientes o indica por qué no existe solución.
 - a) $\overline{13}x = \overline{2}$ en \mathbb{Z}_{23}
 - b) $\overline{16}x = \overline{7}$ en \mathbb{Z}_{100} .
 - c) $\overline{6}X = -\overline{10}$ en \mathbb{Z}_{26} .
 - d) $\overline{15}X = \overline{10}$ en \mathbb{Z}_{20} .
17. ¿Cuántas unidades tiene \mathbb{Z}_{9630} ? ¿Cuántas unidades tiene \mathbb{Z}_{101} ?