ÁLGEBRA

Hoja 3: Aritmética de enteros

1. Usar el principio de inducción matemática para demostrar que si $n \geq 1$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Usar el principio de inducción matemática para demostrar que si $n \geq 1$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

Sugerencia. Usar el problema anterior.

3. Usar el principio de inducción matemática para demostrar que si $n \geq 1$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

4. Decidir razonadamente si existe una $N \geq 0$ tal que para toda $n \geq N$, $n^3 < 2^n$, y en caso de respuesta afirmativa, hallar la menor N con dicha propiedad.

5. Sabemos que dados dos enteros no nulos a y b, existen primos $p_1, \ldots, p_s$ de modo que

$$a = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s} \quad \text{y} \quad b = \pm p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_s^{\beta_s}$$

con $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$.

a) Expresar $\text{mcd}(a, b)$ y $\text{mcm}(a, b)$ en función de estas factorizaciones.

b) Hallar el máximo común divisor de 1547 y 3059 usando el criterio en i) y el algoritmo de Euclides.

c) Hallar el máximo común divisor de 363 y 55 usando el criterio en i) y el algoritmo de Euclides.

6. Sea $d = \text{mcd}(a, b)$. Demuestra que $\text{mcd}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

7. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ no simultáneamente cero, definimos $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ como $f\big((X, Y)\big) = aX + bY$. Demuestra que $\text{Im}(f) = d\mathbb{Z} = \{dm \mid m \in \mathbb{Z}\}$, donde $d = \text{mcd}(a, b)$.

8. Encontrar las parejas $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $\text{mcd}(a, b) = 10$ y $\text{mcm}(a, b) = 100$.

9. Demuestra que la ecuación $6x + 20y = 7$ no tiene soluciones enteras. ¿Qué puedes decir de $25x + 45y = 3$?

10. Hallar el conjunto de soluciones enteras de las siguientes ecuaciones:

a) $111x + 36y = 15$, **b)** $10x + 26y = 1224$ y **c)** $6x + 10y = 20$.

11. Hallar las soluciones enteras de $11x - 13y = 1$ que tengan $max\{|x|, |y|\} < 13$.

12. Dos números naturales son múltiplos de 12 y 15 respectivamente y su suma es 81. Hallarlos.

13. Venus, la Tierra y Marte tardan 225, 365 y 687 días respectivamente en girar alrededor del Sol. ¿Cada cuánto tiempo están en la misma posición que hoy?

14. Demuestra que todo número entero se puede expresar como la suma de un múltiplo de 1001 más un múltiplo de 30.

15. El laboratorio se ha gastado 50340 euros en ordenadores IBM y HP. Si los ordenadores IBM cuestan a 1500 euros cada uno y los HP a 1080 euros, ¿cuántos se han comprado de cada marca?

16. Un grupo de amigos decide ir al cine. La película en la Sala 1 cuesta 11 euros, y la película en la Sala 2 cuesta 13 euros. Indica cuántos amigos fueron al cine sabiendo que en total se gastaron 150 euros.

17. En Madrid tocan los A y simultáneamente en las afueras los B. Una pandilla de amigos se divide entre los dos conciertos. La entrada para A cuesta $31,80$ euros y para B, 15 euros. Si se han gastado en total $600,60$ euros, ¿cuántos amigos formaban la pandilla?

18. Decimos que un punto de coordenadas enteras $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ es visible desde el origen si el segmento que une dicho punto con el origen no pasa por ningún otro punto. ¿Cuánto vale $mcd(x, y)$ si (x, y) es un punto visible? ¿Cuántos puntos impiden "ver" el punto $(42, 45)$?