ÁLGEBRA

Hoja 1: Conjuntos y funciones

1. Dar una descripción alternativa de los siguientes conjuntos:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$ *b)* $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$ *d)* $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 3\}$
e) $\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} \text{ tal que } y + 1 < x\}$ *f)* $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
g) $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} \text{ tal que } x = y^2\}$ *h)* $\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} \text{ tal que } y < 5 \text{ y } x = y^2\}$.

Donde $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

2. Sean $S = \{a, b, c, d\}$, $T = \{1, 2, 3\}$ y $U = \{b, 2\}$. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son correctas?

(1)	$\{a\} \in S$	(2)	$a \in S$	(3)	$\{a, c\} \subseteq S$
(4)	$\varnothing \in S$	(5)	$\{a\} \subseteq \mathcal{P}(S)$	(6)	$\{\{a\}, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(S)$
(7)	$\{a, c, 2, 3\} \subseteq S \cup T$	(8)	$U \subseteq S \cup T$	(9)	$b \in S \cap U$
(10)	$\{b\} \subseteq S \cap U$	(11)	$\{1, 3\} \in T$	(12)	$\{1, 3\} \subseteq T$
(13)	$\{1, 3\} \in \mathcal{P}(T)$	(14)	$\{\varnothing\} \in \mathcal{P}(S)$	(15)	$\varnothing \in \mathcal{P}(S)$
(16)	$\varnothing \subseteq \mathcal{P}(S)$	(17)	$\{\varnothing\} \subseteq \mathcal{P}(S)$		

3. Sean $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = \{3, 4, 5, 7, 8, 9\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $V = \{2, 4, 6, 8\}$ subconjuntos del conjunto $\mathbb{N}$ (de números naturales). Calcular:
(a) $S \cap U$ (b) $(S \cap T) \cup U$ (c) $(S \cup U) \cap V$ (d) $(S \cup V) \setminus U$ (e) $(U \cup V \cup T) \setminus S$
(f) $(S \cup V) \setminus (T \cap U)$.

4. Demuestra las siguientes igualdades:
(a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (b) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
(c) $(A \cup B) \cap A = A$ (d) $(A \cap B) \cup A = A$

5. Calcula el conjunto de partes del conjunto vacío, es decir, calcula $\mathcal{P}(\varnothing)$.

6. Decidir razonadamente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:
(1) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ (2) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

7. Dados los subconjuntos S y V del ejercicio 3, indica cuáles son los elementos del conjunto $S \times V$ y observa que es un subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

8. Comparar los siguientes conjuntos, siendo $S = \{a, b\}$, $T = \{a\}$, $V = \{1, 2\}$ y $U = \{1\}$:
(a) $(S \times V) \setminus (T \times U)$ (b) $(S \setminus T) \times (V \setminus U)$.

9. Decir si es verdadero o falso que para conjuntos A, B y C cualesquiera se tiene que,

(i)	$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$	*(ii)*	$\lvert A \cup B\rvert = \lvert A \setminus B\rvert + \lvert B \setminus A\rvert + \lvert A \cap B\rvert$
(iii)	$A \times (B \triangle C) = (A \times B) \triangle (A \times C)$	*(iv)*	$\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$
(v)	$A \subseteq B \Longleftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$	*(vi)*	$A \setminus B = A \setminus C \Longrightarrow B = C$,

donde A y B son conjuntos finitos en el apartado *ii)* y $\lvert D\rvert$ denota el número de elementos de D.

10. ¿Cuáles de las siguientes funciones son inyectivas?, ¿cuáles suprayectivas?, ¿hay alguna biyectiva? Empieza asegurándote de que efectivamente son funciones.

(i) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(m) = m + 2$ (ii) $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ g(n) = n(n + 1)$

(iii) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ (iv) $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ f(x) = x^2 + 4x$

(v) $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ g(n) = n/(n + 1)$ (vi) $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ g(n) = n^2$

11. Se consideran las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rll} i) & f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, & f(x) = x^3 + 1 \\ ii) & f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, & f(n) = 2n + 4 \\ iii) & f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, & f(x) = 2x + 4 \end{array}$$

Halla la imagen: $Im(f)$, y $f^{-1}(0)$ en cada uno de los casos.

12. Sea $a \in \mathbb{R}$ no nulo. Comprobar que $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{a\}$, dada por $f(x) = \dfrac{ax}{x - a}$ es biyectiva y calcular su inversa.

13. Decidir de qué tipo son las funciones f, $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definidas por

$$f(n) = \begin{cases} n + 1 & \text{si } n \text{ es par,} \\ 2n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \qquad g(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par,} \\ n + 1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

14. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 0, \\ x - 27 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Comprobar si f es inyectiva y/o sobreyectiva. Calcular $f \circ f$.

15. Dar ejemplos de funciones $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de cada uno de los siguientes tipos:

a) Inyectiva pero no suprayectiva.
b) Suprayectiva pero no invectiva.
c) Biyectiva.
d) Ni inyectiva ni suprayectiva.

16. Si $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ y $A, B \subseteq \mathcal{U}$, decidir si son verdaderas o falsas las fórmulas

$$\begin{array}{ll} i)\ f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) & ii)\ f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) \\ iii)\ f^{-1}(f(A)) = A & iv)\ f^{-1}(A^c) = \big(f^{-1}(A)\big)^c. \end{array}$$

17. Sea $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la aplicación $f(x) = x^3 - 3x$. Calcular $f((0, 2))$, $f([-1, 3))$, $f^{-1}([-1, 1])$ y $f^{-1}((0, \infty))$.

18. Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ son biyectivas, demostrar que $g \circ f$ también lo es y que

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

19. Indicar cuántas funciones biyectivas se pueden definir del conjunto $\{a, b, c\}$ en sí mismo.

20. Sea A finito, y $|A| = n$. Indicar cuántas funciones biyectivas se pueden definir de A en A.