Universidad Autónoma de Madrid — Álgebra II. Curso 2016-17

Físicas

Examen final convocatoria extraordinaria de junio

Lunes, 26 de junio de 2017

Apellidos ______ **Nombre** ______

DNI ______ **Grupo** ______

Instrucciones: Incluid todos los pasos; simplificad todo lo posible.

Problema 1. (a) (2 puntos) Sea W un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Dar la definición de producto escalar o interno en W. Un producto escalar sobre W es una función

$\phi : W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$

- Sesquilineal: es decir lineal en la primera variable, y para la segunda: $\phi(u, v+w) = \phi(u,v) + \phi(u,w)$ y $\phi(u, \lambda v) = \bar{\lambda}\,\phi(u,v)$ $\forall u,v,w \in W$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$;
- Hermítica: i.e. $\forall u,v \in W$, $\phi(u,v) = \overline{\phi(v,u)}$;
- Definida positiva: i.e. $\forall u \in W$, $\phi(u,u) \geq 0$ y $\phi(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}_W$.

(b) (18 puntos) Sea W el espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de las matrices cuadradas de orden 2. Decidir razonadamente si la forma $\phi : W \times W \to \mathbb{C}$ definida mediante $\phi(A,B) = \mathrm{Traza}(A\overline{B}^T)$ es un producto escalar en W, y en caso de respuesta afirmativa, calcular el complemento ortogonal del subespacio $Z = < A, B >$ generado por $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$.

- $\phi(A,B) = \mathrm{Traza}(A\overline{B}^T)$
- Sesquilineal: Sean $A, B, C \in W$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$\phi(A+C, B) = \mathrm{Traza}((A+C)\overline{B}^T) = \mathrm{Traza}(A\overline{B}^T + C\overline{B}^T) = \mathrm{Traza}(A\overline{B}^T) + \mathrm{Traza}(C\overline{B}^T) = \phi(A,B) + \phi(C,B)$.

$\phi(A, B+C) = \mathrm{Traza}(A\,\overline{(B+C)}^T) = \mathrm{Traza}(A(\overline{B}^T + \overline{C}^T)) = \mathrm{Traza}(A\overline{B}^T + A\overline{C}^T) = \mathrm{Traza}(A\overline{B}^T) + \mathrm{Traza}(A\overline{C}^T) = \phi(A,B) + \phi(A,C)$

$\phi(\lambda A, B) = \mathrm{Traza}((\lambda A)\overline{B}^T) = \mathrm{Traza}(\lambda(A\overline{B}^T)) =$

$\lambda\ \text{Traza}(A\overline{B}^T) = \lambda\, \phi(A,B).$

- $\phi(A,\lambda B) = \text{traza}(A\,\overline{\lambda B}^T) = \text{traza}(A\,\overline{\lambda}(\overline{B})^T) =$
$= \text{traza}(\overline{\lambda}(A\,\overline{B}^T)) = \overline{\lambda}\ \text{traza}(A\overline{B}^T) =$
$= \overline{\lambda}\ \phi(A,B)$

- <u>Hermítica</u> $\phi(A,B) = \text{traza}(A\overline{B}^T)$

$\phi(B,A) = \text{traza}(B\overline{A}^T) = \text{traza}(\overline{A}^T B) =$
$= \text{traza}((\overline{A}^T B)^T) = \text{traza}(B^T\overline{A}) =$
$= \text{traza}(\overline{\overline{B}^T A}) = \overline{\text{traza}(\overline{B}^T A)} = \overline{\text{traza}(A\overline{B}^T)}$
$= \overline{\phi(A,B)}.$

- <u>Definida positiva</u> $\phi(A,A) = \text{Traza}(A\overline{A}^T) =$
$\underset{\perp}{=} \text{Traza}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d}\end{pmatrix}\right) = a\overline{a} + b\overline{b} + c\overline{c} + d\overline{d} =$
$= |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 \geq 0$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$
$a, b, c, d \in \mathbb{C}$

y es cero $\Leftrightarrow |a| = |b| = |c| = |d| = 0$
$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}.$

Como $B = (1+i)A$, basta calcular $\langle A\rangle^\perp$.
Ahora: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in \langle A\rangle^\perp \Leftrightarrow \text{Traza}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i\end{pmatrix}\right) = 0$

$\Leftrightarrow a + id = 0 \Leftrightarrow a = id$

$\Rightarrow \underset{\langle A,B\rangle^\perp}{\underset{\shortparallel}{\langle A\rangle^\perp}} = \left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix} \right\rangle$

Problema 2. (10 puntos) Hallar los coeficientes a y b de la recta de regresión $a + bx = y$ que mejor se ajusta a los siguientes datos: $(1,0), (2,1), (3,1)$.

Ecuación normal: $A^*A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^*\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^*A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^*\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 2 \\ 6 & 14 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$3a + 3 = 2$, $\quad a = -\frac{1}{3}$

$$\boxed{y = \frac{x}{2} - \frac{1}{3}}$$

Problema 3. (a) (10 puntos) Calcula una forma de Jordan real de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 2 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - 4 + 4 + 4(1-\lambda) + 4(1-\lambda) + (1-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)^3 + 9(1-\lambda) = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 + 9\right] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 10)$$

$$= 0 \iff \lambda = 1 \text{ ó } \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = 1 \pm 3i.$$

Tomando $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1 - 3i$ (por ejemplo) tenemos que

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) (10 puntos) Si llamamos J a la matriz calculada en el apartado (a), halla una matriz invertible P tal que $A = PJP^{-1}$.

v_1 asociado a $\lambda_1 = 1$, $v_1 = (x, y, z)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = -y, \ y = -2z.$$

Tomando p. ej. $z = 1$, $v_1 = (2, -2, 1)$.

v_2 asociado a $\lambda_2 = 1 - 3i$

$$\begin{bmatrix} 3i & 1 & 2 \\ -1 & 3i & 2 \\ -2 & -2 & 3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ Usamos el método de Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & -3i & 2 \\ 3i & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 3i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3i & -2 \\ 0 & -8 & 2+6i \\ 0 & -2-6i & 3i-4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3i & -2 \\ 0 & -4 & 1+3i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow 4y = (1+3i)z$. Tomando $z = 4$, $y = 1+3i$.

$x = 3iy + 2z = 3i(1+3i) + 8 = -1 + 3i$

Base $= \{v_1, \operatorname{Re} v_2, \operatorname{Im} v_2\}$.

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Problema 4. Sea $\mathcal{R} = \{(0,0,0); e_1, e_2, e_3\}$ la referencia ortonormal estándar de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$. Considera la afinidad $f : \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ cuya expresión en coordenadas respecto a $\mathcal{R}$ es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(a) (5 puntos) Demuestra que f es una isometría.

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = AA^* = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I$$

Alternativamente, puede comprobarse que las columnas forman una BON. $\det A = 1$ ó -1 no prueba que A sea una isometría. P. ej. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ satisface

$\det A = 1$, pero $Ae_1 = 2e_1$.

(b) (5 puntos) Decide de manera razonada el tipo de movimiento determinado por f.

$\det A = \det(\vec{f})$ (otra notación)

$= -1$ luego es o una simetría, o una simetría deslizante. $\operatorname{tr} A = 1$, luego es una simetría o simetría deslizante con respecto a un plano. Puntos fijos: satisfacen

$$3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$ Buscamos las soluciones.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$ No hay.

Simetría deslizante

(c) (10 puntos) Determina todos los elementos geométricos que intervienen en la clasificación de f.

Si buscamos el plano invariante de la parte lineal dada por $3A$, con la misma cuenta de antes, salvo por el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, obtenemos $(3A-3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

luego el plano invariante de la aplicación lineal asociada es $-x+y+2z=0$.

El plano invariante P de la aplicación afín es paralelo a éste. Buscamos un punto contenido en él. Como $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in P$,

$-0+1+2=3$, $P: -x+y+2z=3$.

El vector deslizamiento v viene dado por $v = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.