Examen final convocatoria ordinaria de mayo

Lunes, 29 de mayo de 2017

Apellidos ______________________ **Nombre** ______________
DNI ______________________ **Grupo** ______________

Problema 1. (a) Sea $P_n(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios en una variable y con coeficientes reales, tales que grado$(p(x)) \leq n$. Sea $L : P_n(\mathbb{R}) \times P_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la forma bilineal dada por

$$L(p,q) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

i) (4 puntos) Decide razonadamente si L define un producto escalar en $P_2(\mathbb{R})$.

Para ello es necesario comprobar si L es simétrica y definida positiva.

- $L(p,q) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) = q(0)p(0) + q(1)p(1) + q(2)p(2) = L(q,p)$

El producto es conmutativo en $\mathbb{R}$.

Esto prueba que L es simétrica.

- Para ver si L es definida positiva, tenemos que comprobar si $L(p,p) \geq 0 \quad \forall\, p \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ y además $L(p,p) = 0 \Leftrightarrow p = 0$.

$L(p,p) = p(0)^2 + p(1)^2 + p(2)^2 \geq 0$ por ser suma de cuadrados de números reales. Así $L(p,p) = 0 \Leftrightarrow p(0) = p(1) = p(2) = 0$

Esto quiere decir que 0, 1, 2 son raíces de $p(x)$, pero $p(x)$ es un polinomio de grado ≤ 2, luego la única posibilidad de que $L(p,p) = 0$ es que $p(x) = 0$.

ii) (1 punto) Decide razonadamente si L define un producto escalar en $P_3(\mathbb{R})$.

- La simetría es similar al caso anterior, pero ahora L no es definida positiva: el polinomio $p(x) = x(x-1)(x-2)$ no es 0, pero $L(p,p) = 0$.

(b) (5 puntos) Sea W el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de las matrices cuadradas de orden 2. y sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula el complemento ortogonal del subespacio $Z = < A >$ con respecto al producto escalar $\phi : W \times W \to \mathbb{R}$ definido mediante $\phi(A, B) = \text{Traza}(AB^T)$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Z^{\perp} \Leftrightarrow \text{Traza}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Traza} \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ c+d & 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a+b=0$$

$$\Rightarrow Z^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a+b=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ c & d \end{pmatrix} ; a, c, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= < \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > .$$

(c) (5 puntos) Sea V un espacio vectorial euclídeo con un producto escalar φ y sea $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ la norma inducida por φ. Sean $u, v \in V$. Demuestra que si u es ortogonal a v, entonces $\|u + \lambda v\| \geq \|u\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Supongamos que $u \perp v$. Como $\|u+\lambda v\|, \|u\| \geq 0$, basta probar la desigualdad para sus cuadrados:

$$¿ \|u+\lambda v\|^2 \geq \|u\|^2 ?$$

$$\|u+\lambda v\|^2 = \varphi(u+\lambda v, u+\lambda v) \underset{\substack{\text{bilinealidad} \\ +\text{ simetría}}}{=} \varphi(u,u) + \lambda^2 \varphi(v,v) +$$

$$+ 2\varphi(u,v) \underset{u \perp v}{=} \varphi(u,u) + \lambda^2 \varphi(v,v) = \|u\|^2 + \lambda^2 \|v\|^2 \geq$$

$$\underset{\lambda^2 \|v\|^2 \geq 0}{\geq} \|u\|^2$$

Problema 2. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$.

(a) (9 puntos) Decide, de manera razonada, si $\lim_{n\to\infty} A^n$ existe.

Para facilitar los cálculos, buscamos una forma de Jordan de A:

$$\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 1'2\lambda + 0'2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \begin{cases} 1 \\ 0'2 \end{cases}$$

Luego A es diagonalizable (tiene dos autovalores distintos). Por tanto, existe una matriz invertible P tal que: $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0'2 \end{pmatrix}P^{-1}$. Además, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \left(P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0'2 \end{pmatrix}P^{-1}\right)^n = P\begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0'2^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

Así, $\lim_{n\to\infty} A^n = \lim_{n\to\infty} P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0'2^n \end{pmatrix}P^{-1} = P \lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0'2^n \end{pmatrix}P^{-1}$

$= P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$ Luego el límite existe.

(b) (1 punto) Calcula $\lim_{n\to\infty} A^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, sabiendo que $x + y = 1$.

Linealm. indep

Calculamos P. Para ello necesitamos dos autovectores de A:

¿$\ker(A - I)$? $\begin{pmatrix} -0.6 & 0.2 \\ 0.6 & -0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = 3x$

¿$\ker(A - 0.2I)$? $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.6 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -y$

Luego podemos tomar $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1/4 \\ 3/4 & -1/4 \end{pmatrix}$

$$\lim_{n\to\infty} A^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \underset{(a)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 3/4 & -1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 3/4 & 3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{4} \\ \frac{3x+3y}{4} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}.$$

Problema 3. Considera la matriz $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) (7 puntos) Calcula la forma de Jordan J de la matriz B.

Calculamos los autovalores: $\det(B-\lambda I_3) = (2-\lambda)\left[(3-\lambda)(1-\lambda)+1\right]$

$= -(\lambda-2)^3$. $\lambda = 2$ es autovalor triple.

· $\operatorname{Ker}(B-2I_3) = \left\{(x,y,z) : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \langle (0,0,1) \rangle$

· $\operatorname{Ker}(B-2I_3)^2 = \left\{(x,y,z) : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle$

· $\operatorname{Ker}(B-2I_3)^3 = \mathbb{R}^3$

$$\underset{\dim 1}{\operatorname{Ker}(B-2I_3)} \subsetneq \underset{\dim 2}{\operatorname{Ker}(B-2I_3)^2} \subsetneq \underset{\dim 3}{\operatorname{Ker}(B-2I_3)^3}$$

dim 3 = multiplicidad del autovalor

$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) (3 puntos) Encuentra una matriz invertible P tal que $B = PJP^{-1}$.

Tomamos $v_3 \in \operatorname{Ker}(B-2I_3)^3 \setminus \operatorname{Ker}(B-2I_3)^2$;

p.e. $v_3 = (1,0,0)$.

Definimos $v_2 = (B-2I_3)(v_3) \Rightarrow v_2 = (1,1,1)$

Definimos $v_1 = (B-2I_3)(v_2) \Rightarrow v_1 = (0,0,1)$

Tomamos $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ observamos que J es la matriz de la ap. lineal definida por B en la base estándar

Luego si definimos $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Problema 4. Considera las siguientes formas cuadráticas sobre $\mathbb{R}^2$:

$$Q_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & 7x^2 + y^2 - 6xy \end{array} \qquad Q_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & 5x^2 + 2y^2 - 6xy. \end{array}$$

(a) (5 puntos) Sea $B_c = \{e_1, e_2\}$ la base canónica o estándar de $\mathbb{R}^2$. Escribe las matrices simétricas de las formas Q_1 y Q_2 respecto a la base B_c.

$$[Q_1]_{B_c} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad [Q_2]_{B_c} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) (5 puntos) Decide de manera razonada si alguna de las dos formas cuadráticas es definida positiva.

$5 > 0$, $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1 > 0$.

Por Sylvester, Q_2 es definida positiva.

(c) (10 puntos) Encuentra una base B' de $\mathbb{R}^2$ respecto a la que las que Q_1 y Q_2 tengan una forma canónica, es decir, diagonal. Escribe la forma canónica de las dos formas cuadráticas en esa base.

$$[Q_1]_{B_c} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad [Q_2]_{B_c} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 7-5\lambda & -3+3\lambda \\ -3+3\lambda & 1-2\lambda \end{vmatrix} = (7-5\lambda)(1-2\lambda) - (3\lambda-3)^2$$

$$= 7 + 10\lambda^2 - 19\lambda - 9\lambda^2 - 9 + 18\lambda = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1) = 0$$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. $[Q_1]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $[Q_2]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. $B' = ?$

$\lambda_1 = -1$ $\begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x = y$. Tomamos, p. ej., $v_1 = (1,2)$

y normalizamos con respecto a Q_2:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$; luego $\|v_1\|^2 = 1$.

$\lambda_2 = 2$, $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = y$. Tomamos, p. ej.

$v_2 = (1,1)$ y normalizamos:

$(1 \;\; 1)\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \;\; 1)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1$, luego $\|v_2\|^2 = 1$,

y $B' = \{(1,2), (1,1)\}$. Comentario: no es necesario comprobar ortogonalidad, esta es consecuencia del desarrollo teórico (esencialmente por el teorema espectral, en la parte que dice que autovalores distintos de aplicaciones autoadjuntas son ortogonales). SI es necesario comprobar que v_1 y v_2 tienen norma 1 con respecto al producto escalar definido por Q_2.

Problema 5. Sea $\mathcal{R} = \{(0,0); e_1, e_2\}$ la referencia ortonormal estándar de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.
(a) (10 puntos) Encuentra la expresión en coordenadas de la rotación de ángulo $\pi/6$ que lleva el punto $(1,1)$ al punto $(1,0)$.

$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \tilde{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\tilde{T}$ = rotación de ángulo $\frac{\pi}{6}$

$$[\tilde{T}]_{B_c B_c} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$, B_c = base canónica.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3}-1 \\ 1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3-\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3-\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(b) (5 puntos) Calcula el centro de la rotación del apartado (a) anterior. El centro de rotación es el único punto fijo $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}-3 \\ \sqrt{3}+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}-2 & -1 \\ 1 & \sqrt{3}-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$ Escribimos la matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \sqrt{3}-2 & -1 & \sqrt{3}-3 \\ 1 & \sqrt{3}-2 & \sqrt{3}+1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \sqrt{3}-2 & -1 & \sqrt{3}-3 \\ \sqrt{3}-2 & 7-4\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} \sqrt{3}-2 & -1 & \sqrt{3}-3 \\ 0 & 8-4\sqrt{3} & 4-2\sqrt{3} \end{array}\right) \Rightarrow y = \frac{4-2\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{4-2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}$$

$$(\sqrt{3}-2)x - \frac{1}{2} = \sqrt{3}-3, \quad x = \frac{\sqrt{3}-\frac{5}{2}}{\sqrt{3}-2} = \frac{(\sqrt{3}-\frac{5}{2})(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}$$

$$= \frac{3-5-\frac{\sqrt{3}}{2}}{3-4} = 2+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Comentario: Para que una respuesta se considerase completa había que simplificar todo lo posible. P. ej., decir que el centro de rotación es la solución de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ NO es una respuesta completa.