NOMBRE, APELLIDOS Y DNI:

INSTRUCCIONES: Entregar UNICAMENTE esta hoja. IMPORTANTE: Se prohibe el uso de calculadoras, libros, apuntes, teléfonos moviles, etcetera. Las respuestas deben justificarse adecuadamente. Incluir todos los pasos. Simplificar todo lo posible. INFORMACION: Cada problema vale 5 puntos.

I) Encuentra las ecuaciones (o equivalentemente la matriz) de la simetría (ortogonal) respecto al plano $2x + y + z = 0$ de $\mathbb{R}^3$. A efectos de esta entrega, basta indicar la matriz como producto de matrices, sin necesidad de llevar a cabo la multipicación final.

Sea $B = \{(1,-2,0), (0,1,-1), (2,1,1)\}$ $\quad [S]_{BB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/6 & 1/6 & 1/6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/6 & -2/6 & -2/6 \\ 0 & 1 & 0 & 2/6 & 1/6 & -5/6 \\ 0 & 0 & 1 & 2/6 & 1/6 & 1/6 \end{array}\right]$$

$$[S]_{B_cB_c} = [I]_{B_cB} [S]_{BB} [I]_{BB_c} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Alternativamente</u>, se puede escoger B ortonormal, en cuyo caso, $P^{-1} = P^T$. Por ej., tomamos

$B = \{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1), \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1)\}$. Entonces

$$[S]_{B_cB_c} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

II) Consideramos $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual y sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación de ángulo α. Determina la adjunta de h.

$[h]_{B_cB_c} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, luego $[h^*]_{B_cB_c} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\operatorname{sen}(-\alpha) \\ \operatorname{sen}(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix}$ = rotación de ángulo $-\alpha$. <u>Alternativamente</u>, considerando $\mathbb{C}$ en vez de $\mathbb{R}^2$, $[h]_{B_cB_c} = e^{i\alpha}$.

$(e^{i\alpha} z, w) = e^{i\alpha}(z,w) = (z, e^{-i\alpha} w)$,

luego $[h^*]_{B_cB_c} = e^{i(-\alpha)}$.

III) Hallar la forma de Jordan real de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(3-\lambda) + 2 - \lambda + 2(1-\lambda)$$
$$= -\lambda(3+\lambda^2-4\lambda) - 3\lambda + 4 = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 2 & & 2 & -4 & 4 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

$\lambda_1 = 2, \quad \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$

$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = z, \ y = 0, \quad v_1 = (1,0,1)$$

Escogemos, p. ej. $\lambda_2 = 1+i$

$$\begin{bmatrix} -i & 0 & 1 \\ -1 & -1-i & 1 \\ -1 & -2 & 2-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} ix = z, \ (2-i)z = x + 2y = iz + 2y \\ (2-i)z = x + 2y \end{array}$$

$v_2 = (1, i, i)$

$B = \{(1,0,1), (1,0,0), (0,1,1)\}$

$$J_{real} = [A]_{BB} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Comentario: J_{real} depende de la base.

$B' = \{(1,0,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$ es una base aceptable, y entonces $[A]_{B'B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Por otra parte, $B'' = \{(1,0,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ no es una base aceptable. Una respuesta correcta y completa requiere dar una base B explícitamente, y en función de B, escribir $[A]_{BB}$.