ALGEBRA II — **Ejercicios resueltos en clase 1.** — CURSO 2016/17

NOMBRE, APELLIDOS Y DNI:

INSTRUCCIONES: Entregar UNICAMENTE esta hoja. IMPORTANTE: Se prohibe el uso de calculadoras, libros, apuntes, teléfonos moviles, etcetera. Las respuestas deben justificarse adecuadamente. Incluir todos los pasos. Simplificar todo lo posible. SUGERENCIA: Mirar las dos caras de esta hoja. INFORMACION: Cada problema vale 5 puntos.

I) Considera la aplicación $\phi : \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(A,B) = \text{traza}\,(AB^T)$. Demuestra que ϕ es un producto escalar en $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

1) Simetría: $\varphi(A,B) = tr(AB^T) = tr((AB^T)^T) = tr\, BA^T = \varphi(B,A)$.

2) Por simetría, basta probar linealidad en la primera entrada. $\varphi(\alpha A + B, C) = tr((\alpha A + B)C^T) = tr(\alpha AC^T + BC^T)$
$= \alpha\, tr(AC^T) + tr(BC^T) = \alpha\,\varphi(A,C) + \varphi(B,C)$.

3) Positiva definida: Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \neq 0$,

$$\varphi(A,A) = tr\, AA^T = tr \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & * & * \\ * & d^2+e^2+f^2 & * \\ * & * & g^2+h^2+i^2 \end{pmatrix}$$

$$= a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2+i^2 > 0$$

II) Sea V un espacio vectorial eucídeo con un producto escalar φ y sea $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ la norma inducida por φ. Sean $u, v \in V$. Demuestra que $\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\varphi(u,v)$ (esta igualdad recibe el nombre de *Identidad de polarización*).

$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u,v)$
$-(\|u\|^2 + \|v\|^2 - 2(u,v)) = 4(u,v)$.

III) Calcula la expresión en coordenadas (con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$) de la proyección ortogonal sobre la recta $l = \{x = y = z\}$. Calcula la proyección ortogonal sobre l del vector $(0, 1, 2)$.

1) Sea $v = (x, y, z)$. $P_l(v) = \frac{\langle (x,y,z),(1,1,1)\rangle}{1^2+1^2+1^2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{x+y+z}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, luego $P_l\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$. Alternativamente se puede dar la matriz $[P_l]_{B_cB_c} = \left[[P_l e_1]_{B_c}\ [P_l e_2]_{B_c}\ [P_l e_3]_{B_c}\right] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

---

2) En vez de usar la fórmula para la proyección, puede emplearse directamente la noción de perpendicularidad: sean v_1, v_2 vectores linealmente independientes y perp. a $v_3 = [1\ 1\ 1]^T$. Como antes, sea $v = [x\ y\ z]^T$. Como $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, existen escalares α, β, γ t.q. $v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$. $P_l(v) = \gamma v_3$ y $v - P_l(v) = \begin{pmatrix}x-\gamma\\y-\gamma\\z-\gamma\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, luego $x + y + z = 3\gamma$, y $P_l(v) = \frac{x+y+z}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, luego $P_l\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

---

3) Otra posibilidad, aplicable en situaciones más generales que el caso de las proyecciones, consiste en buscar una base con respecto a la cual la matriz sea fácil de ver, y a continuación, usar un cambio de coordenadas. Sea $B = \{v_1 = [1, -1, 0]^T, v_2 = [0, 1, -1]^T, v_3 = [1\ 1\ 1]^T\}$. Entonces $[P_l]_{B_cB_c} = [I]_{B_cB}[P_l]_{BB}[I]_{BB_c}$, con

$[I]_{BB_c} = \begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix}$ y $[P_l]_{BB} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$. Hallamos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\-1&1&1&0&1&0\\0&-1&1&0&0&1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&2&1&1&0\\0&-1&1&0&0&1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&2&1&1&0\\0&0&3&1&1&1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&2&1&1&0\\0&0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\0&0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right].\quad [P_l]_{B_cB_c} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&-1\\1&1&-2\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}, \text{ luego } \left[P_l\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right]_{B_c} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Como se indica en las INSTRUCCIONES, había que incluir todos los pasos al hallar la matriz inversa, etc.