ÁLGEBRA II

Hoja 8. Aplicaciones ortogonales y unitarias

1. Sean $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dos endomorfismos cuyas matrices en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ respectivamente son:

a) $M(f_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

c) $M(f_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Decida de manera razonada si son ortogonales.

2. Considera el endomorfismo $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ cuya matriz referida a la base canónica de $\mathbb{C}^2$ es:

$$\begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{-1-i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Suponemos el producto escalar usual.

a) Decide de manera razonada si f es una aplicación unitaria.

b) Encuentra una base ortonormal respecto a la que la matriz de f sea diagonal.

3. Clasifica las siguientes aplicaciones ortogonales de $\mathbb{R}^3$ dando todos sus elementos geométricos.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

4. Escribe la matriz de la simetría ortogonal de $\mathbb{R}^3$ respecto a la recta engendrada por el vector $(1, 1, 1)$.

5. Definimos una aplicación lineal T realizando primero una rotación con respecto al eje generado por $(1, 1, 1)$, y a continuación una simetría ortogonal con respecto al plano de rotación (el plano ortogonal al eje de rotación). Sabiendo que $T(2, 1, 0) = (-1, 0, -2)$, hallar la matriz (en forma canónica) que representa a T

con respecto a una BON adecuada. Además, hallar la matriz A que representa a T con respecto a la base canónica.

6. Sea $V = \mathbb{R}^2$. Decide de manera razonada el resultado de componer:

a) Dos rotaciones en V.

b) Dos simetrías en V.

c) Una rotación con una simetría.