ÁLGEBRA II

Hoja 7. Formas cuadráticas, Series de matrices

1. Diagonaliza en una base ortonormal las siguientes formas cuadráticas:

a) $Q(x, y, z) = xy + yz + zx$;

b) $Q(x, y) = 2x^2 + 8xy + 2y^2$.

2. Diagonaliza, dando el cambio de base, la forma cuadrática cuya expresión en coordenadas respecto a la base estándar de $\mathbb{R}^2$ es:

$$Q(x, y, z) = xy + 2xz.$$

3. Considera la forma cuadrática $Q_\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cuya expresión en coordenadas respecto a la base estándar es:

$$Q_\beta(x, y, z) = \beta x^2 + \beta y^2 + (1 - \beta)z^2 + 2xy.$$

Calcula el rango y los índices de inercia de Q_β para los distintos valores de $\beta \in \mathbb{R}$. El rango de una forma cuadrática es el el rango de cualquier matriz que la represente, o equivalentemente, el numero de autovalores distintos de 0, contados según su multiplicidad. Los índices de inercia son los números de autovalores positivos, negativos o 0, siempre contados según su multiplicidad.

4. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tres números reales distintos, y sea V el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de los polinomios de grado menor o igual que 2. Definimos la función

$$\begin{array}{rccl} f: & V & \to & \mathbb{R} \\ & p(x) & \mapsto & p(a)^2 + p(b)^2 + p(c)^2. \end{array}$$

a) Demuestra que f es una forma cuadrática. *Sugerencia: observa que la función*

$$\frac{1}{2}\left(f(p(x) + q(x)) - f(p(x)) - f(q(x))\right)$$

es una forma bilineal...;

b) Escribe la matriz de f respecto a la base $\{1, x, x^2\}$;

c) Encuentra una base de V respecto a la cual la matriz de f sea diagonal.

5. Sea $Q_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática que respecto a la base estándar tiene como matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & -\alpha \\ \alpha & (1 - \alpha) & 0 \\ -\alpha & 0 & (1 + \alpha) \end{pmatrix}.$$

a) Encuentra una base ortonormal respecto a la que Q_α tenga una forma canónica (forma canónica significa que no aparecen términos cruzados, sólo los cuadrados).

b) Decide de manera razonada para qué valores de α, Q_α es definida y semidefinida.

6. Diagonalizar simultáneamente las siguientes formas cuadráticas:

a) $Q_1(x,y) = x^2 + 26y^2 + 10xy, Q_2(x,y) = x^2 + 56y^2 + 16xy$.

b) $Q_1(x,y) = -4xy, Q_2(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2$.

c) $Q_1(x,y,z) = x^2 - 8xy - 4y^2 + 10xz + 4yz + 2z^2, Q_2(x,y,z) = 6x^2 + 8xy + 4y^2 - 2xz - 4yz + 2z^2, (\lambda = 1,2,3)$.

d) $Q_1(x,y,z) = -2x^2 - 4xy - 2y^2 + 2xz + 2yz - z^2, Q_2(x,y,z) = 4x^2 + 4xy + 2y^2 - 2xz - 2yz + z^2, (\lambda = -1,0)$.

7. Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ un polinomio con coeficientes reales. Dada una matriz cuadrada $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ podemos evaluar $p(x)$ en A del siguiente modo:

$$p(A) := a_0 I_n + a_1 A + \ldots + a_n A^n.$$

Observa que $p(A)$ es de nuevo una matriz cuadrada, de modo que si A es la matriz de un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$, entonces $p(A)$ es otra vez un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$. Observa también que para todo par de polinomios $p(x), q(x)$, se tiene que $p(A)q(A) = q(A)p(A)$.
Una vez hemos definido polinomios de matrices cuadradas o de endomorfismos, las series de matrices se definen simplemente como el límite de polinomios de matrices de grado n, cuando n tiende a infinito. Una serie que se utiliza con frecuencia (entre otras cosas) para resolver ecuaciones diferenciales, es $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

a) Demuestra que si D es diagonal, con entradas $d_1, \ldots, d_n$ en la diagonal principal (abreviación: $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$) entonces $e^D = \operatorname{diag}(e^{d_1}, \ldots, e^{d_n})$. Concluye que e^D es definida positiva, y en particular, inversible.

b) Demuestra que si $A = PDP^{-1}$, donde D es diagonal, entonces $e^A = Pe^D P^{-1}$.

c) Halla e^N cuando N es nilpotente (recuerda que N es nilpotente si existe algún m tal que $N^m = 0$.

d) Demuestra que si P es una proyección, entonces $e^P = I + (e-1)P$.