ÁLGEBRA II

Hoja 6. Formas de Jordan

1. Comprueba que las siguientes matrices no son diagonalizables y halla su forma de Jordan y una base de Jordan para cada una de ellas:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad C_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad C_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Hallar la forma de Jordan real de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Consideramos las siguientes matrices con coeficientes reales:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 9 & 3 \\ -4 & 2 & 6 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_8 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_9 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Determina la forma canónica de Jordan J_i (sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ en el que el polinomio característico descomponga en factores lineales) de cada una de las matrices A_i y da en cada caso la base de Jordan.

b) En los casos en los que la forma de Jordan tenga coeficientes en $\mathbb{C}$, encuentra J_i^{real}, la forma canónica real de A_i, una base de $\mathbb{R}^4$ respecto a la cual el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ definido por A_i tenga matriz J_i^{real} y una matriz invertible Q_i tal que $AQ_i = Q_i J_i^{real}$.

Nota: Para facilitar los cálculos damos a continuación los polinomios característicos de cada matriz: **Para** A_1**:** $\left(X^2+1\right)^2$; **para** A_2**:** $\left(X^2-2X+2\right)\left(X^2+1\right)$; **para** A_3**:** $(X-4)^2 X^2$; **para** A_4**:** $X^2(X-1)^2$; **para** A_5**:** X^4; **para** A_6**:** X^4; **para** A_7**:** $(X+1)^4$; **para** A_8**:** X^4; **para** A_9**:** $(X+2)^4$.

4. Acerca del Teorema Espectral. Sea V un espacio vectorial (cuya dimensión puede ser finita o infinita). Dado un operador lineal $T: V \to V$, se define el espectro $\sigma(T)$ de T como el conjunto de escalares λ tales que $T - \lambda I$ no es inversible, donde I denota la identidad. En el caso finito dimensional $\sigma(T)$ es el conjunto de autovalores de T, pero en el caso de dimensión infinita el espectro puede ser más grande, como vamos a comprobar en el siguiente ejemplo. Denotamos mediante $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ al conjunto de sucesiones de números reales $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ tales que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$ (éste es un ejemplo típico de espacio de Hilbert). Definimos el operador desplazamiento a la derecha D_d mediante $D_d((a_0, a_1, \dots)) = (0, a_0, a_1, \dots)$.

a) Observa que $D_d = D_d - 0 \cdot I$ no es inversible. Más precisamente, observa que D_d no es inversible por la derecha, es decir, no existe ningún operador $T : \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ tal que $D_d \circ T = I$. Por tanto, $0 \in \sigma(D_d)$.

b) Demuestra que 0 no es un autovalor de D_d, es decir, no existe ningún vector v distinto de 0 tal que $D_d(v) = 0 \cdot v$.