ÁLGEBRA II

Hoja 4. Espacio Vectorial Unitario.

1. Problemas del libro LADW[1]: pp. 124-125, 1.1-1.4. Si no se dice otra cosa, se entiende que el producto interno o escalar es el habitual. Observad que los paréntesis en los problemas 1.2 y 1.3 denotan el producto escalar usual en $\mathbb{C}^n$.

2. Se dice que una matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ es hermítica si $A^T = \overline{A}$. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y sea $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Demuestra que φ es hermítica si y sólo si $[\varphi]_B = M_B(\varphi)$ es una matriz hermítica para cualquier base B de V.

3. Sea $V = \mathbb{C}^3$ y sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base estándar. Sea $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ la forma sesquilineal cuya matriz asociada respecto a B es:

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 2 & 1+i \\ 0 & 1-i & 3 \end{pmatrix}$$

a) Demuestra que φ es un producto escalar.

b) Calcula una base ortonormal de V respecto al producto escalar definido por φ.

4. Sea V un espacio vectorial unitario y sea $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ el producto escalar de V. Demuestra la **Desigualdad de Cauchy-Schwarz**: *Para todo par de vectores $u, v \in V$, se tiene que*

$$|\varphi(u, v)|^2 \leq \varphi(u, u)\varphi(v, v).$$

Observa que $|\varphi(u, v)|$ denota el módulo del número complejo $\varphi(u, v)$ *Sugerencia: define $k := \frac{\varphi(u,v)}{\varphi(v,v)}$, y considera $\varphi((u-kv), (u-kv))$. Otra posibilidad es derivar la Desigualdad de Cauchy-Schwarz de la identidad del paralelogramo.*

5. Demuestra que la desigualdad de Cauchy-Schwarz es una igualdad si y sólo si uno de los vectores es un múltiplo del otro.

6. Sea V un espacio vectorial unitario y sea $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ el producto escalar de V. Demuestra que la función $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ definida por $\|u\| := +\sqrt{\varphi(u, u)}$ es una norma en V.

7. Sea V un espacio vectorial unitario.

a) Demuestra la **Identidad del paralelogramo**: *Para todo par de vectores $u, v \in V$,*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Compara el enunciado de este ejercicio con el del problema 11 de la hoja 1.

b) Demuestra la **Identidad de polarización**: *Para todo par de vectores $u, v \in V$,*

$$4\varphi(u, v) = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - i\|u - iv\|^2.$$

[1] *Linear Algebra done wrong*, S. Treil

Compara el enunciado de este ejercicio con el del problema 1 (a) de la hoja 2.

c) Demuestra que para todo par de vectores $u, v \in V$,

$$2\varphi(u,v) = \|u+v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - (1+i)\|u\|^2 - (1+i)\|v\|^2.$$

Compara el enunciado de este ejercicio con el del problema 1 (b) de la hoja 2.

d) Decide de manera razonada si el enunciado del problema 1 (c) de la hoja 2 sigue siendo cierto en el caso de espacios vectoriales unitarios.

e) Dos vectores u y u son ortogonales si y sólo si $\|u+\lambda v\| \geq \|u\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ (en un espacio vectorial normado dos vectores son *ortogonales en el sentido de Birkhoff* si satisfacen esta condición).

f) Demuestra el **Teorema de Pitágoras**: *Si* $u, v \in V$ *son vectores ortogonales entonces*

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

8. Sea V un espacio vectorial unitario, sea $f : V \to V$ una aplicación lineal y sea $\widetilde{f} : V \to V$ su adjunta (también denotada por f^*).

a) Sea B una base ortonormal. Demuestra que:

$$M_B(\widetilde{f}) = \overline{M_B(f)}^T, \text{ o, usando una notación alternativa, que } [f^*]_B = [f]_B^*.$$

b) Supongamos que $W \subset V$ es un subespacio invariante por f. Demuestra que entonces $W^\perp$ es invariante por $\widetilde{f}$.

9. Sea $V = \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ con el producto escalar $\varphi(A,B) = \text{Traza}\,(A\overline{B}^T)$. Sea $f : V \to$ la aplicación lineal $f(A) = A^T$. Encuentra la adjunta de f.

10. Sea V un espacio vectorial unitario, sea $f : V \to V$ una aplicación lineal.

a) Demuestra que f es unitaria si y sólo si $f^{-1} = \widetilde{f} = f^*$.

b) Sea B una base ortonormal. Demuestra que f es unitaria si y sólo si

$$M_B(f^{-1}) = \overline{M_B(f)}^T, \text{ ó } [f]_B^{-1} = [f]_B^*.$$

c) Supongamos que $W \subset V$ es un subespacio invariante por f. Demuestra que $W^\perp$ también es invariante por f.

11. Usando el producto escalar usual en $\mathbb{C}^3$:

a) Encuentra la expresión en coordendas de la simetría ortogonal respecto a la recta $l = \{x - iz = 0, y = 0\}$. ¿Es unitaria? ¿Es autoadjunta?

b) Encuentra la expresión en coordendas de la proyección ortogonal sobre la recta $l = \{x - (1+i)z = 0,\ y = 0\}$. ¿Es autoadjunta?

12. Dada una matriz $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, denotamos por A^* a su traspuesta conjugada.

a) Demuestra que la aplicación bilineal $\varphi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ dada por $\varphi(u,v) = v^*u$ coincide con el producto escalar usual de $\mathbb{C}^n$.

b) Sea $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ una matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{C}$. El espacio $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ de tales matrices es claramente isomorfo a $\mathbb{C}^{mn}$, basta identificar la matriz (a_{ij}) con el vector $(a_{11}, a_{12}, \dots a_{mn})$. Comprueba que vía dicho isomorfismo, el producto interno $L(A,B) := \text{traza}(B^*A)$ coincide con el producto interno estándar en $\mathbb{C}^{mn}$, dado por $(x,y) := y^*x$.