ÁLGEBRA II

Hoja 3. Espacio Vectorial Euclídeo III.

1. Encuentra la aplicación adjunta de:

a) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con $h(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y + 2z, x + 2y + 3z)$ con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$.

b) Con la notación y el producto escalar del ejercicio 3 de la hoja 2, la aplicación $g : V_2 \to V_2$ dada por $g(p(x)) = xp'(x) - (xp(x))'$.

c) La aplicación $T : \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ dada por $T(A) = A^T + A$ con el producto escalar del ejercicio 6 de la hoja 1.

2. Sea V un espacio vectorial euclídeo sobre $\mathbb{R}$ y sea $W \subset V$ un subespacio. Sea $P : V \to V$ la proyección ortogonal sobre W. Determina la adjunta de P.

3. Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión n y sea $W \subset V$ un subespacio vectorial no nulo de V. Recuerda que en tal caso $V = W \oplus W^\perp$. De este modo, cada $u \in V$ se escribe de manera única como la suma de un vector en W y otro en $W^\perp$, i.e., $u = w_1 + w_2$ con $w_1 \in W$ y $w_2 \in W^\perp$. Decimos que $f : V \to V$ es la simetría (ortogonal) respecto a W si para cada vector $u \in V$ con $u = w_1 + w_2$ como antes, $f(u) = w_1 - w_2$. Observa que una simetría es, en particular, una aplicación lineal. Determina la adjunta de f. *Sugerencia: escoge una base adecuada y escribe la matriz de f en esa base).*

4. Consideramos $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual y sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación de ángulo α. Determina la adjunta de h. ¿Es h ortogonal?

5. Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, sea $b \in \mathbb{R}^n$ y sea $x = (x_1, \dots, x_m)$. Vamos a probar que el sistema $Ax = b$ tiene solución única por mínimos cuadados si y sólo si las columnas de A son linealmente independientes. Para ello procede del siguiente modo:

a) Demuestra que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^T A)$. *Sugerencia: para la inclusión '$\supset$" interpreta A como la matriz de una aplicación lineal y a A^T como la matriz de su adjunta.*

b) Utiliza el apartado anterior y la fórmula de la dimensión para probar que la dimensión del espacio de columnas de A coincide con la dimensión del espacio de columnas de $A^T A$.

c) Concluye que $A^T Ax = A^T b$ tiene solución única si y sólo si las columnas de A son linealmente independientes.

6. Sea V un espacio vectorial euclídeo sobre $\mathbb{R}$ y sea $f : V \to V$ una aplicación lineal que conserva la norma inducida por el producto escalar (i.e., $\|f(u)\| = \|u\|$ para todo $u \in V$). Demuestra que f es ortogonal. *Sugerencia: para todo par de vectores $u, v \in V$ se tiene que $\|u+v\|^2 = \|f(u+v)\|^2$ y ahora usa la definición de norma en términos del producto escalar.*

7. Sea l una recta (un subespacio vectorial de dimensión 1) en $\mathbb{R}^2$ donde consideramos el producto escalar usual. Demuestra que la simetría ortogonal respecto a l es una aplicación ortogonal.

8. Sea $W \subset V$ un subespacio vectorial eucídeo no nulo de un espacio V de dimensión $n \geq 1$. Sea $f : V \to V$ la simetría (ortogonal) respecto a W. Demuestra que f es una aplicación ortogonal.

9. Encuentra las ecuaciones (o equivalentemente la matriz) de la simetría (ortogonal) respecto al plano $2x + y + z = 0$ de $\mathbb{R}^3$.

10. Encuentra las expresiones analíticas (o equivalentemente, las matrices) de las siguientes aplicaciones ortogonales de $\mathbb{R}^2$:

a) La simetría respecto a la recta $2x + y = 0$.

b) El giro de ángulo $\pi/3$.

11. Decide de manera razonada si los siguientes endomorfismos de $\mathbb{R}^2$ son aplicaciones ortogonales con el producto escalar usual:

a) $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y. \end{cases}$

12. Decide de manera razonada si los siguientes endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ son aplicaciones ortogonales con el producto escalar usual:

a) $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ z' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = z \\ y' = -y \\ z' = -x. \end{cases}$

13. Sea V un espacio vectorial euclídeo. Decide de manera razonada si la composición de dos aplicaciones ortogonales $f, g : V \to V$ es necesariamente una aplicación ortogonal.

14. Decimos que una aplicación lineal $P : V \to V$ es una proyección si $P = P \circ P = P^2$. Probar que P es una proyección ortogonal si y sólo si es una proyección autoadjunta. Comparar con el ejercicio 2. *Sugerencia:* Probar que $(Pu, v) = (Pu, Pv)$.