ÁLGEBRA II

Hoja 2. Espacio Vectorial Euclídeo II.

1. Se V un espacio vectorial eucídeo con un producto escalar φ y sea $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ la norma inducida por φ. Sean $u, v \in V$. Demuestra que:

a) $\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\varphi(u,v)$ (esta igualdad recibe el nombre de *Identidad de polarización*);

b) $\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 = 2\varphi(u,v)$;

c) Los vectores $u+v$ y $u-v$ son ortogonales si y sólo si $\|u\| = \|v\|$.

d) Los vectores u y v son ortogonales si y sólo si $\|u+\lambda v\| \geq \|u\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ (en un espacio vectorial normado dos vectores son *ortogonales en el sentido de Birkhoff* si satisfacen esta condición).

2. Considera la forma bilineal $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\psi((x_1\ x_2\ x_3),(y_1\ y_2\ y_3)) = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

a) Decide de manera razonada si ψ es un producto escalar.

b) Encuentra una base de $\mathbb{R}^3$ con respecto a la cual la matriz de ψ sea diagonal.

3. Sea $V_n = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \text{grado}(p(x)) \leq n\}$ para un cierto $n \in \mathbb{N}$. En $V_n \times V_n$ considera la aplicación

$$\phi(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

a) Demuestra que ϕ es un producto escalar.

b) Describe el subespacio de polinomios ortogonales al polinomio x.

c) Para $n = 3$ calcula una base ortogonal de V_3.

4. Calcula el complemento ortogonal de la recta

$$L := \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_2 = x_3\}$$

con respecto al producto escalar

$$\phi((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 + (x_1+x_2)(y_1+y_2) + (x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3),$$

y con respecto al producto escalar usual.

5. En $\mathbb{R}^3$ encuentra un producto escalar para el cual el complemento ortogonal del plano $\{x = 0\}$ sea la recta $\{x = y, z = 0\}$. ¿Es único este producto escalar?

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal cuya matriz en una base ortonormal B es:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 1-\alpha \end{pmatrix}.$$

Para $\alpha = b^2/(a^2+b^2)$ y $\beta = -ab/(a^2+b^2)$ demuestra que f es una proyección ortogonal sobre la recta $ax + by = 0$.

7. Calcula la expresión en coordenadas (con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$) de la proyección ortogonal sobre la recta de $l = \{x = y = z\}$. Calcula la proyección ortogonal sobre l del vector $(0, 1, 2)$.

8. La siguiente lista corresponde a los datos recogidos por un trabajador autónomo. En ella se ilustra la proporción de las ganancias que ha destinado a ampliar su negocio durante los seis últimos años:

Años	1	2	3	4	5	6
Proporción invertida	$0,20$	$0,25$	$0,20$	$0,35$	$0,45$	$0,40$

a) Calcula la ecuación de la recta que mejor se ajusta a estos datos.

b) Estima la proporción esperada para el séptimo año.

9. Considera la nube de puntos dada por la siguiente tabla:

0	2	4	6	8	10
$4,7$	$4,8$	$4,9$	$5,7$	$5,9$	$6,9$

a) Calcula la ecuación de la recta que mejor se ajusta a estos datos; calcula el error cuadrático cometido.

b) Calcula la ecuación de la parábola que mejor se ajusta a estos datos; calcula el error cuadrático cometido.

c) ¿Cuál de las dos gráficas te parece que se ajusta mejor a los datos?