

## ÁLGEBRA II

### Hoja 1. Espacios Euclídeos I.

1. Decide de manera razonada si las siguientes funciones  $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  son formas bilineales en los espacios vectoriales reales  $V$  dados.

- a)  $V = \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , con  $\varphi(A, B) = \text{traza}(A + B)$ ;
- b)  $V = \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , con  $\varphi(A, B) = \text{traza}(AB)$ ;
- c)  $V = \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , con  $\varphi(A, B) = \text{traza}(AB) - \text{traza}(A)\text{traza}(B)$ ;
- d)  $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es diferenciable}\}$ , con  $\varphi(f, g) = \int_0^1 f'(t)g(t)dt$ ;
- e)  $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$ , con  $\varphi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)(x^2 + 1)dx$ ;
- f)  $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$ , con  $\varphi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x - 1)dx$ ;
- g)  $V = \mathbb{R}^2$ , con  $\varphi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1 + y_1)^2 - x_2y_2$ .

2. Considera la base estándar  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Escribe la matriz  $[\varphi]_B = M_B(\varphi)$  de las siguientes formas bilineales:

- a)  $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_3 + 2x_2y_2 - 5x_2y_3 + 4x_3y_1$ ;
- b)  $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$ .

3. Considera ahora la base  $B' = \{(1, 2, 3), (-1, 1, 2), (1, 2, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^3$  y denotamos por  $(x'_1, y'_1, z'_1), (x'_2, y'_2, z'_2)$  las coordenadas de dos vectores de  $\mathbb{R}^3$  respecto a la base  $B'$ . Escribe la expresión en términos de las coordenadas anteriores de las formas bilineales del ejercicio 2.

4. Decide de manera razonada cuáles de las funciones del ejercicio 1 son formas bilineales simétricas.

5. Se dice que una forma bilineal  $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  es antisimétrica si para todo par de vectores  $u, v \in V$  se tiene que  $\varphi(u, v) = -\varphi(v, u)$ .

- a) Encuentra una forma bilineal antisimétrica  $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ;
- b) Sea  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V$  y sea  $\varphi$  una forma bilineal en  $V$ . Da una condición necesaria y suficiente sobre  $M_B(\varphi)$  para que  $\varphi$  sea antisimétrica;
- c) Demuestra que toda forma bilineal  $\varphi$  en  $V$  se puede escribir como la suma de una forma bilineal simétrica y una antisimétrica.

6. Considera la aplicación  $\phi : \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\phi(A, B) = \text{traza}(AB^T)$ . Demuestra que  $\phi$  es un producto escalar en  $\mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ .

7. Considera la aplicación  $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \rightarrow (2x_1 - 2x_2 + 4x_3)y_1 + (-2x_1 - 2x_3)y_2 + (6x_3 + 4x_1 - 2x_2)y_3 .$$

- a) Demuestra que  $\phi$  es una forma bilineal simétrica.
- b) Decide de manera razonada si  $\phi$  es un producto escalar.

**Observación:** Es posible definir ortogonalidad respecto a una forma bilineal simétrica en general (aunque ésta no sea definida positiva). Esto puede dar lugar a patologías como vamos a comprobar en los siguientes apartados del problema.

c) Calcula el subespacio ortogonal al vector  $(1, -1, -1)$  respecto a  $\phi$ .

d) Describe geoméricamente el conjunto de rectas de  $\mathbb{R}^3$  que son ortogonales a sí mismas respecto a la forma  $\phi$ .

8. Para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$  considera en  $\mathbb{R}^3$  la aplicación bilineal

$$\phi_\alpha((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula los valores de  $\alpha$  para los que  $\phi_\alpha$  es un producto escalar.

b) Sea  $M_\alpha$  el plano ortogonal a  $(1, 1, 1)$  respecto a  $\phi_\alpha$ . Demuestra que el conjunto  $\{M_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$  es un haz de planos que pasa por una recta. Describe la recta.

9. Para cada  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  considera en  $\mathbb{R}^3$  la aplicación bilineal

$$\phi_{\alpha, \beta}((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} \beta & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

a) Describe el subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  determinado por los pares  $(\alpha, \beta)$  para los que  $\phi_{\alpha, \beta}$  es un producto escalar.

b) Determina los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  para que el plano de ecuación  $x + y + z = 0$  sea ortogonal al vector  $(1, 0, 1)$  respecto al producto escalar  $\phi_{\alpha, \beta}$ .

10. Sean  $u_1 = (-2, -1, 1)$ ,  $u_2 = (0, -1, 0)$  y  $u_3 = (1, -1, 0)$  vectores de  $\mathbb{R}^3$ .

a) Demuestra que  $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$  es una base de  $\mathbb{R}^3$ .

b) Demuestra que existe un producto escalar  $\phi$  respecto al cual  $B'$  es una base ortogonal. Decide de manera razonada si  $\phi$  es único con esta propiedad.

c) Demuestra que existe un producto escalar  $\psi$  respecto al cual  $B'$  es una base ortonormal. Decide de manera razonada si  $\psi$  es único con esta propiedad. Describe la matriz de  $\psi$  respecto a la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ .

11. Sea  $V$  un espacio vectorial euclídeo y sea  $\|\cdot\|$  la norma inducida por el producto escalar de  $V$ . Demuestra la *Identidad del paralelogramo*: para todo par de vectores  $u, v \in V$  se tiene que

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$