ÁLGEBRA II

Hoja 0: Repaso de Álgebra I

EJERCICIO A. Sean $u_1 = (1, 1)$ y $u_2 = (-1, 1)$ vectores de $\mathbb{R}^2$, y sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que

$$f(u_1) = u_1 \quad \text{y} \quad f(u_2) = -u_2. \tag{1}$$

1. Demuestra que $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

2. Decide, de manera razonada, si f está completamente determinada por las condiciones descritas en (1).

3. Describe geométricamente el efecto que tiene f al ser aplicada a un vector cualquiera de $\mathbb{R}^2$.

4. Escribe la matriz de f respecto a la base $\mathcal{B}$.

5. Calcula la imagen de $(1, 3)$ por f.

6. Sea (a, b) un vector cualquiera de $\mathbb{R}^2$. Calcula su imagen por f y expresa sus coordenadas respecto a la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$.

7. Escribe la matriz de f respecto a la base canónica.

EJERCICIO B. Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & +\frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Describe las imágenes por g de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

9. Calcula el determinante de A. ¿Es g inyectiva?

10. A la vista de tu respuesta a la pregunta anterior, da una cota para la dimensión de la imagen de g.

11. Describe la imagen de g: fijado un vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ da condiciones necesarias y suficientes para que (a, b, c) esté en la imagen de g.

12. Da una interpretación geométrica del efecto que tiene g al actuar sobre los vectores de $\mathbb{R}^3$.

EJERCICIO C. Sea $F := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0, z + t = 0\}$ y sea G el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por $\{(1, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (2, 0, 0, 1)\}$.

13. Da una base de F.

14. ¿Cuál es el mínimo número de ecuaciones lineales homogéneas que necesitamos para describir G? Da un ejemplo de sistema lineal homogéneo cuyo conjunto de soluciones sea G. ¿Es este sistema único con esta propiedad?

15. Da una base del subespacio $F + G$.

16. Describe el subespacio $F \cap G$ de dos maneras distintas (dando una base y dando un sistema de ecuaciones que lo determine).

17. Comprueba que se verifica la fórmula de Grassman sobre las dimensiones de los subespacios que aparecen en el problema.

EJERCICIO D. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C\vec{x} = \vec{0}. \tag{2}$$

Contesta de manera razonada a las siguientes preguntas **sin hacer ningún cálculo**.

18. Sea $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz asociada es C. Al resolver el sistema de ecuaciones (2), ¿qué información obtenemos sobre h?

19. Observa que

$$C\vec{x} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

¿Qué información nos da el número de soluciones del sistema sobre los vectores columna de C?

20. Sea ahora $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ un vector cualquiera. Observa que

$$C\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{se puede escribir como} \quad x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

¿Qué significa, en términos de h, que el sistema (2) tenga o no solución?

21. ¿Qué significa, en términos de los vectores columna de C que el sistema (2) tenga o no solución?