ÁLGEBRA II

Extensión: Diagonalización de endomorfismos

1. Dados los siguientes endomorfismos:

$$
\begin{array}{ll}
f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, & f_1(x,y) = (y,x),\\
f_2 : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, & f_2(x,y) = (y,-x),\\
f_3 : \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}^2, & f_3(x,y) = (x-y/2, y-2x),\\
f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, & f_4(x,y) = (x, x+y),\\
f_5 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, & f_5(x,y,z) = (3y+9z, x/3+5z, x/9+y/3),\\
f_6 : \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^3, & f_6(x,y,z) = (6x-7y-20z, -8z, x-y),\\
f_7 : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3, & f_7(x,y,z) = (2x+y+z, 2x+3y+2z, 4x+4y+3z),\\
f_8 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, & f_8(x,y,z) = (x+y, x+z, y+z),\\
f_9 : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R}), & f_9(p(x)) = p'(x),\\
f_{10} : M_2(\mathbb{F}_2) \longrightarrow M_2(\mathbb{F}_2), & f_{10}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ a+b+d & b+c+d \end{pmatrix},\\
f_{11} :: W \longrightarrow W, & f_{11}(x,y,z) = (3x+y, 2z, y-x), \quad \text{donde } W = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x+y+z=0\}.
\end{array}
$$

Se pide para cada uno de ellos lo siguiente:

a) Calcular los autovalores y autovectores.

b) Estudiar si es diagonalizable o no sobre el cuerpo base.

c) En caso de que sea diagonalizable:

1. Encontrar una base $\mathcal{B}$ formada por autovectores.
2. Escribir la matriz diagonal D del endomorfismo con respecto a $\mathcal{B}$.
3. Dar explícitamente la relación entre la matriz D y la matriz del endomorfismo que hayas utilizado para calcular el polinomio característico.

2. Determina en cada caso una base de $\mathbb{R}^n$ (o de $\mathbb{C}^n$) en la que las matrices dadas a continuación diagonalicen.

$$
A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix},
$$

$$
A_6 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix},\ A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ A_9 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}
$$