Solución de problemas II [1]

Álgebra II Curso 2015-16

1. Diagonalización de aplicaciones autoadjuntas

Recordad que las aplicaciones autoadjuntas para el producto escalar estándar, dado por la identidad, se corresponden precisamente a las matrices simétricas en la base canónica.

Ejercicio 8.5.2.a *Diagonaliza en una base ortonormal el endomorfismo dado en la base canónica:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: Si una matriz es simétrica siempre diagonaliza, aunque tenga autovalores con multiplicidad mayor que uno. Sabemos además que vectores correspondientes a autovalores diferentes son ortogonales. Esto quiere decir que si la matriz tiene 3 autovalores diferentes, la base de autovectores que obtenemos es, automáticamente, ortogonal (y al normalizarlos, ortonormal).

En este caso el polinomio característico es:

$$\det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 0-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(3-\lambda)^2 + 32 + 16\lambda - 8(3-\lambda)$$

$$= -\lambda^3+6\lambda^2-9\lambda+32+16\lambda-24+8\lambda = -\lambda^3+6\lambda^2+15\lambda+8 = -(\lambda+1)(\lambda^2-7\lambda-8) = -(\lambda+1)^2(\lambda-8)$$

de forma que -1 es una raíz doble y 8 una raíz simple.

Obtengamos ahora el autoespacio de -1. A priori, como sabemos que la matriz diagonaliza, sabemos que el autoespacio tiene que contener dos vectores linealmente independientes y por tanto está dado por una única ecuación:

$$\ker(A + Id) = \ker \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \{2x + y + 2z = 0\}$$

Ahora elegimos dos vectores que sean base ortonormal del autoespacio:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Y ahora nos quedaría obtener un autovector de 8 que nos de una base ortonormal. Como tiene que ser ortogonal al autoespacio de -1, tiene que ser proporcional a $(2, 1, 2)$ (que es el vector

[1] Los ejercicios resueltos son una selección más o menos representativa de los propuestos en las notas de Lucía Contreras. Soluciones por David Alfaya y Álvaro del Pino

que nos salió antes como los coeficientes de la ecuación de dicho autoespacio):

$$v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Así que la base es $\{v_1, v_2, v_3\}$. $\square$

2. Diagonalización de formas cuadráticas

Si piden diagonalizar una forma cuadrática en una base ortonormal, necesariamente tenéis que hacerlo buscando autovalores y autovectores. Si os pidieran diagonalizarla en una base cualquiera (u os pidieran cosas como la signatura sólo), es más sencillo hacerlo completando cuadrados. De hecho, a menudo los autovalores del polinomio característico podrían ser imposibles de sacar a mano.

Ejercicio 9.1.1.c *Diagonalizar en una base ortonormal la forma cuadrática:*

$$Q(x, y, z) = xy + yz + zx$$

Solución: Nos toca diagonalizar. La aplicación bilineal simétrica viene dada por la matriz:

$$q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos el polinomio característico. Multiplico todo por 2 para quitarme el factor $1/2$:

$$\det(2q - 2\lambda Id) = \begin{vmatrix} -2\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (2-2\lambda) & (2-2\lambda) & (2-2\lambda) \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(2-2\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2\lambda \end{vmatrix} = (2-2\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-2\lambda \end{vmatrix} = 2(1-\lambda)(1+2\lambda)^2$$

Así que tenemos que el autovalor $-1/2$ tiene multiplicidad 2 y el autovalor 1 multiplicidad 1. Esto significa que el índice de inercia positivo (la cantidad de números positivos en la diagonal al diagonalizar) es 1, el índice de inercia negativo es 2 y la signatura es $(1, 2, 0)$.

Procedemos como en el ejercicio anterior para sacar una base ortonormal del autoespacio de $-1/2$:

$$\ker(q + \frac{1}{2}Id) = \ker \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \{x + y + z = 0\}$$

Esto nos dice que el autoespacio de 1 está generado por $(1, 1, 1)$. Una base ortonormal del autoespacio de $-1/2$ sería:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

y lo completamos a una base de todo el espacio con el autovector de 1:

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

Ejercicio 9.4.1.c *Diagonaliza, dando el cambio de base, la siguiente forma cuadrática:*

$$Q(x, y, z) = xy + 2xz$$

Solución: Ahora sí, lo hacemos completando cuadrados. La cosa es siempre igual:

- Si una de las variables aparece al cuadrado, agrupamos todos los términos que la contienen y expresamos eso como un cuadrado más una serie de términos en las otras variables. Entonces repetimos el tema con el resto de las variables.
- Si no, hacemos un cambio de variables para que aparezca una variable al cuadrado.

Entonces:

1. No hay término al cuadrado. Vamos a hacer un cambio de variables en x e y:

$$\begin{cases} x = x' + y' \\ y = x' - y' \end{cases}$$

   Observad que el cambio de variables en la otra dirección, que necesitaremos luego, sería:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x+y}{2} \\ y' = \dfrac{x-y}{2} \end{cases}$$

   Al aplicar el cambio nos queda:

$$Q(x', y', z) = (x' + y')(x' - y') + 2(x' + y')z = (x')^2 - (y')^2 + 2x'z + 2y'z$$

2. Como ahora tenemos término al cuadrado, por ejemplo $(x')^2$, pues agrupo todo con x':

$$Q(x', y', z) = [(x')^2 + 2x'z] - (y')^2 + 2y'z = [(x' + z)^2 - z^2] - (y')^2 + 2y'z$$

   en el último paso lo que hacemos es cuadrar el coeficiente de z en $(x' + z)^2$ para que nos salga $2x'z$. Luego, restamos el z^2 que nos sale al expandir $(x' + z)^2$.

3. Ahora tenemos dos términos al cuadrado, z e y'. Puedo agrupar usando cualquiera de los dos. En este caso, resulta que ya tenemos un cuadrado perfecto:

$$Q(x', y', z) = (x' + z)^2 - z^2 - (y')^2 + 2y'z = (x' + z)^2 - (z - y')^2$$

4. Ahora podemos hacer un cambio de variables:

$$\begin{cases} x'' = x' + z \\ y'' = z - y' \end{cases}$$

   De forma que la forma cuadrática nos queda como:

$$Q(x'', y'', z) = (x'')^2 - (y'')^2$$

En las coordenadas x'', y'', z, la aplicación simétrica y bilineal asociada viene dada por la matriz:

$$(x'', y'', z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que el índice de inercia positivo es 1, el índice negativo es 1 y la signatura es $(1, 1, 1)$.

El cambio de base viene dado por:

$$x'' = x' + z = x/2 + y/2 + z$$

$$y'' = z - y' = z - x/2 + y/2$$

$$z = z$$

Y los coeficientes dan las filas del cambio de base de la base estándar a la base dada por x'', y'' y z:

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El cambio de base de la base nueva a la vieja está dado por B^{-1}.

□

3. Aplicaciones ortogonales

Ejercicio 11.1.1 *Determinar si los endomorfismos expresados en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ respectivamente por las siguientes matrices son ortogonales.*

a) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Solución:

a) Dado que A es la matriz del endomorfismo en una base ortonormal, para comprobar que es una aplicación ortogonal basta comprobar si $A^tA = I$ y, efectivamente

$$A^tA = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

con lo que el endomorfismo es ortogonal.

b) En este caso el endomorfismo no resulta ortogonal, ya que

$$\det(A) = (-1) \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

y el determinante de la matriz de un endorfismo ortogonal en una base ortonormal debe tener determinante 1 o -1.

De forma similar, podríamos haber dicho que las columnas segunda y tercera no son ortogonales, con lo cual no puede ser una matriz ortogonal.

$\square$

Ejercicio 11.1.6 *Demostrar que una aplicación ortogonal de $\mathbb{R}^n$ sólo admite como valores propios reales los valores 1 y -1.*

Solución: Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación ortogonal cualquiera. Sea λ un autovalor real de f y sea v un autovector para el autovalor λ, es decir, un vector no nulo tal que $f(v) = \lambda v$. Al ser f una aplicación ortogonal tenemos que, por la bilinealidad del producto escalar

$$\langle v, v\rangle = \langle f(v), f(v)\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda^2 \langle v, v\rangle$$

Como $v \neq 0$, $\langle v, v\rangle \neq 0$. Dividiendo a ambos lados por $\langle v, v\rangle$ obtenemos que el autovalor λ satisface la ecuación $\lambda^2 = 1$, cuyas únicas soluciones son $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$. $\square$

Ejercicio 11.1.7 *Considerando una aplicación ortogonal de $\mathbb{R}^n$ como unitaria, probar que todos sus autovalores tienen módulo 1.*

Solución: Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación ortogonal. Sea λ un autovalor y v un vector no nulo tal que $f(v) = \lambda v$. Considerando f como una aplicación unitaria tenemos que, por sesquilinearidad del producto hermítico

$$\langle v, v\rangle = \langle f(v), f(v)\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle = |\lambda|^2\langle v, v\rangle$$

Como $v \neq 0$, $\langle v, v\rangle \neq 0$, luego $|\lambda|^2 = 1$. $\square$

Ejercicio 11.1.9-11.1.10 *Sea f una transformación ortogonal de un espacio vectorial V y sea W un subespacio de V invariante por f. Demostrar que*

a) $W = f(W)$

b) W *también es invariante por* f^{-1}

c) $W^{\perp}$ *también es invariante por* f

Solución: La aplicación f es inyectiva, ya que si $f(v) = 0$, entonces por ser f ortogonal

$$|v| = |f(v)| = |0| = 0$$

con lo que $v = 0$. Al ser V de dimensión finita, esto implica que f también es sobreyectiva y, por tanto, un isomorfismo.

a) Sea $\{w_1, \ldots, w_k\}$ una base de W. Entonces $\{f(w_1), \ldots, f(w_k)\}$ generan $f(W)$. Por ser f inyectiva, como $\{w_1, \ldots, w_k\}$ son linealmente independientes, entonces $\{f(w_1), \ldots, f(w_k)\}$ son linealmente independientes y, por tanto, forman una base de $f(W)$. Como W es invariante por f, $f(W) \subseteq W$ y como ambos tienen una base formada por k elementos, $\dim(f(W)) = \dim(W) = k$, luego $f(W) = W$.

b) Por el apartado anterior, $W = f(W)$. Como f es biyectiva, aplicando f^{-1} a ambos lados de la igualdad obtenemos

$$f^{-1}(W) = f^{-1}(f(W)) = W$$

con lo que, en particular, W es invariante por f^{-1}.

c) Sea $u \in W^{\perp}$. Veamos que $f(u) \in W^{\perp}$, es decir, que para todo $w \in W$, $\langle f(u), w\rangle = 0$. Sea w un vector cualquiera de W. Por ser $W = f(W)$, existe un vector $w' \in W$ tal que $w = f(w')$. Entonces, por ser f ortogonal tenemos

$$\langle f(u), w\rangle = \langle f(u), f(w')\rangle = \langle u, w'\rangle$$

Y el último producto escalar es cero, ya que $u \in W^{\perp}$ y $w' \in W$. Como esto se satisface para cualquier vector $w \in W$, concluimos que $f(u) \in W^{\perp}$ para todo $u \in W^{\perp}$.

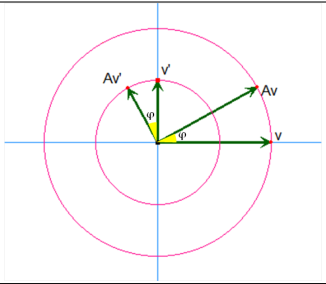
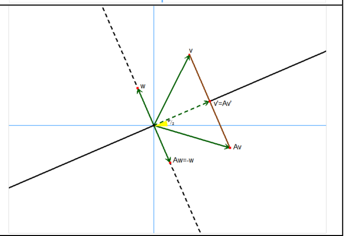
□

4. Transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

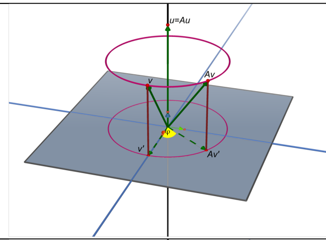
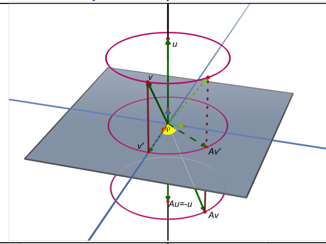
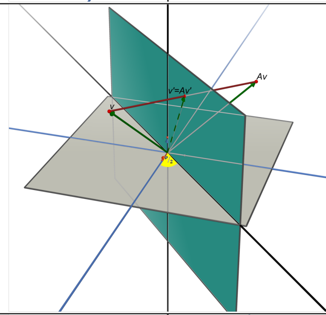
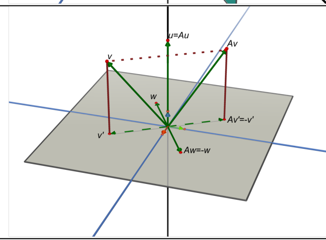
Las siguientes tablas representan un resumen de la clasificación de transformaciones ortogonales (p. 389 - 403 de las notas). Para las transformaciones en $\mathbb{R}^2$, las matrices en negro están expresadas en una base ortonormal cualquiera; en el dibujo los ejes azules representan dicha base. En el caso de la simetría, el ángulo formado entre el eje de simetría y el primer vector de la base (positivamente orientada) sería $\varphi/2$. En $\mathbb{R}^3$, las matrices en negro están parcialmente adaptadas a la transformación: hemos cogido uno de los autovectores de autovalor real existentes (de autovalor 1 o -1 según el tipo) y hemos tomado una base ortonormal cualquiera conteniendo a ese autovector como primer elemento. Los dibujos se corresponden a dichas bases excepto en el caso de la simetría respecto a una recta en el que, por claridad de la representación gráfica, se ha tomado una base adaptada.

En ambos casos, indicamos en rojo las matrices que dan la transformación en una base ortonormal adaptada al eje de giro/eje de simetría/plano de simetría correspondiente.

4.1. Clasificación de transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$

Tipo	**Matriz**	**Determinante/Traza**	**Autovalores**	**Diagrama**
Rotación	$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$	$\det(A) = 1$ $\mathrm{tr}(A) = 2\cos(\varphi)$	$\lambda_1 = e^{\varphi i}$ $\lambda_2 = e^{-\varphi i}$	
Simetría respecto a una recta	$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\det(A) = -1$ $\mathrm{tr}(A) = 0$	$\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = -1$	

4.2. Clasificación de transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^3$

Tipo	Matriz	Determinante/Traza	Autovalores	Diagrama
Rotación vectorial	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$	$\det(A) = 1$ $\mathrm{tr}(A) = 1 + 2\cos(\varphi)$	$\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = e^{\varphi i}$ $\lambda_3 = e^{-\varphi i}$	
Composición de rotación vectorial y simetría	$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$	$\det(A) = -1$ $\mathrm{tr}(A) = -1 + 2\cos(\varphi)$	$\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = e^{\varphi i}$ $\lambda_3 = e^{-\varphi i}$	
Simetría respecto a un plano	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\det(A) = -1$ $\mathrm{tr}(A) = 1$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ $\lambda_3 = -1$	
Simetría respecto a una recta	$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\det(A) = 1$ $\mathrm{tr}(A) = -1$	$\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$	

4.3. Ejercicios

Ejercicio 11.3.2 *Clasificar las tranformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^3$ dadas, en la base canónica, por las siguientes matrices:*

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

h) $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

Solución:

a) Tenemos que $\det(A) = 1$, luego el endomorfismo se trata de una simetría rotacional. Para determinar el endormorfismo debemos determinar el eje de rotación y el ángulo de giro φ. Sabemos que la matriz de una simetría rotacional satisface

$$0 = \mathrm{tr}(A) = 1 + 2\cos(\varphi)$$

Luego $\cos(\varphi) = -\frac{1}{2}$ y obtenemos que $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ o $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$. Calculemos el eje de rotación. Sea $v_1 = (x, y, z)$ un generador del eje. Como el eje es invariante, $Av_1 = v_1$, luego $(A-I)v_1 = 0$, es decir

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

que es equivalente a $x = y = z$. Por ejemplo, podemos tomar $v_1 = (1, 1, 1)$. Finalmente, determinaremos el signo del ángulo de giro respecto a la orientación canónica. Para ello, tomamos un vector v_2 ortogonal a v_1, le aplicamos la matriz del giro y comprobamos si la orientación de la base $\{v_1, v_2, Av_2\}$ es la misma que la de la base canónica, es decir, si el determinante de la matriz de cambio de base $(v_1|v_2|Av_2)$ es positivo. Por ejemplo, tomando $v_2 = (1, 0, -1)$, entonces $Av_2 = (-1, 1, 0)$ y tenemos que

$$|(v_1|v_2|Av_2)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

Luego la base está positivamente orientada y, por tanto, el ángulo de giro es positivo, así que $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

b) Tenemos que $\det(A) = -1$ y $\mathrm{tr}(A) = 1$, luego el endomorfismo es una simetría respecto a un cierto plano π. Pare determinar la simetría basta con encontrar las ecuaciones del plano. Los vectores del plano son los únicos invariantes, luego $v = (x, y, z) \in \pi$ si y sólo si $Av = v$, es decir, si y sólo si $(A - I)v = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

lo que resulta equivalente a $x = z$. Por lo tanto, el endomorfismo corresponde a una simetría respecto al plano de ecuación $x = z$.

d) Tenemos que $\det(A) = 1$ y $\mathrm{tr}(A) = -1$, con lo que el endomorfismo corresponde a una simetría respecto a una recta (o, equivalentemente, a un giro de ángulo π respecto a una recta). Para determinar completamente la simetría basta con obtener un vector generador de la recta. Los vectores de la recta son los únicos invariantes por la simetría, con lo que es suficiente encontrar un vector $v = (x, y, z)$ que cumpla $Av = v$, es decir, tal que $(A - I)v = 0$. Un vector $v = (x, y, z)$ satisface

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

si y sólo si $x = y$ y $z = 0$. Podemos tomar $v = (1, 1, 0)$ y obtenemos que el endomorfismo es una simetría respecto a la recta $\langle(1, 1, 0)\rangle$.

h) Tenemos que $\det(A) = -1$ y $\mathrm{tr}(A) = \frac{6}{7} \neq 1$, luego el endomorfismo corresponde a una rotación vectorial compuesta con una simetría. Para determinarla competamente debemos encontrar un vector generador del eje de rotación y el ángulo de giro. El eje de simetría coincide con el autoespacio correspondiente al autovalor -1 de A. Sea $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ un generador del eje de simetría. Entonces v_1 satisface $(A+I)v_1 = 0$ o, equivalentemente (con el fin de trabajar con matrices de enteros), $(7A + 7I)v_1 = 0$, es decir

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 3 & 9 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = 0$$

Restando a la primera fila tres veces la segunda y sumando dos veces la primera fila más la segunda obtenemos que

$$\left.\begin{array}{rcl} 21x_1 + 21y_1 & = & 0 \\ -21y_1 + 21z_1 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Por ejemplo, podemos tomar $v_1 = (1, -1, -1)$. En una rotación compuesta con una simetría de ángulo φ se cumple que $\mathrm{tr}(A) = -1+2\cos(\varphi)$, luego $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(A)+1) = \frac{13}{14}$, de donde obtenemos que $\varphi = \arccos(13/14)$ o $\varphi = -\arccos(13/14)$. Podemos determinar el signo del ángulo comprobando la orientación de una base formada por el generador del eje de rotación v_1, un vector del plano perpendicular al eje, $v_2 \in \langle v_1\rangle^{\perp}$ y su imagen Av_2. Para ello, debemos comprobar el signo del determinante de la matriz de cambio de base de $\{v_1, v_2, Av_2\}$, es decir, el signo del determinante de la matriz que tiene como columnas a los vectores v_1, v_2 y Av_2. Como vector v_2 podemos tomar cualquier vector ortogonal a v_1, por ejemplo, $v_2 = (1, 1, 0)$. Entonces $Av_2 = \frac{1}{7}(8, 5, 3)$. Tenemos que

$$\mathrm{sg}(\varphi) = \mathrm{sg}(|(v_1|v_2|Av_2)|) = \mathrm{sg}\left(\frac{1}{7}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}\right) = \mathrm{sg}\left(\frac{9}{7}\right) > 0$$

Por lo tanto, $\varphi = \arccos\left(\frac{13}{14}\right)$.

□

Ejercicio 11.3.3 *Escribir la matriz de la simetría ortogonal de* $\mathbb{R}^3$ *respecto a la recta engendrada por el vector* $(1,1,1)$.

Solución: **Método 1: Utilizando la proyección a la recta** $\langle(1,1,1)\rangle$

Sea $U = \langle(1,1,1)\rangle$ la recta respecto a la que tomamos la simetría ortogonal. Sabemos que se satisface la siguiente relación entre la simetría ortogonal respecto a U y las proyecciones a U y $U^\perp$

$$S_U = P_U - P_{U^\perp} = P_U - (I - P_U) = 2P_U - I$$

Por otro lado, la proyección al espacio generado por $(1,1,1)$ está dado por la siguiente ecuación

$$P_U\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{(1,1,1)\cdot(x,y,z)}{|(1,1,1)|^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y+z}{3} \\ \frac{x+y+z}{3} \\ \frac{x+y+z}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz de la simetría está dada por

$$S_U = 2P_U - I = 2\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Método 2: Utilizando una base ortonormal

En una simetría ortogonal respecto a una recta, los vectores del eje de simetría se mantienen invariantes, con lo que para todo $v_1 \in \langle(1,1,1)\rangle$, $S_U(v_1) = v_1$. Por otro lado, por definicion de la simetría, para todo vector v_2 en el plano ortogonal a la recta U, $S_U(v_2) = -v_2$. Por lo tanto, la matriz de la aplicación S_U en la base $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$, con $v_1 \in U$ y $v_2, v_3 \in U^\perp$ es

$$S_U' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz de S_U en la base canónica debemos conjugar la matriz S_U' por la correspondiente matriz de cambio de base. Con el fin de simplificar los cálculos de las matrices de cambio de base (en particular, para evitar tener que calcular la correspondiente inversa), resulta conveniente trabajar con una base ortonormal, $\tilde{B} = \{\tilde{v_1}, \tilde{v_2}, \tilde{v_3}\}$ con $\tilde{v_1} \in U$ y $\tilde{v_2}, \tilde{v_3} \in U^\perp$. Para ello, primero construimos una base ortogonal $\{v_1, v_2, v_3\}$ y luego normalizaremos los vectores. Podemos tomar simplemente $v_1 = (1,1,1)$ y escoger como v_2 cualquier vector ortogonal a v_1, por ejemplo, $v_2 = (1,0,-1)$. Para obtener un vector ortogonal a ambos en $\mathbb{R}^3$ podemos recurrir al producto vectorial de ambos

$$v_3 = v_1 \times v_2 = (-1, 2, -1)$$

Finalmente, obtenemos la base ortonormal normalizando los vectores anteriores

$$\tilde{v_1} = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{(3)}}(1,1,1)$$

$$\tilde{v_2} = \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{1}{\sqrt{(2)}}(1,0,-1)$$

$$\tilde{v_3} = \frac{v_3}{|v_3|} = \frac{1}{\sqrt{(6)}}(-1,2,-1)$$

Usando esta base ortonormal simplificamos el cambio de base

$$
\begin{aligned}
S_U &= (\tilde{v_1}|\tilde{v_2}|\tilde{v_3})S'_U(\tilde{v_1},\tilde{v_2},\tilde{v_3})^t \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\ rrr \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\square$

Ejercicio 11.3.3 *Escribir la matriz A de la rotación vectorial + simetría respecto a plano cuyo eje invariante está engendrado por $v_1 = (1,1,1)$ y que lleva a $v_2 = (2,1,0)$ a $v_3 = (-1,0,-2)$.*

Solución: Observemos primero que $L = \langle v_1 \rangle$ es una recta invariante (aunque no punto a punto) y el plano ortogonal $L^\perp$ es también invariante (pero no punto a punto). Observad también que v_2 y v_3 no pertenecen al plano $L^\perp$.

Una comprobación que hay que hacer para que el problema pueda resolverse es que v_2 y v_3 midan lo mismo (ya que estamos usando una aplicación ortogonal) y tiene que cumplirse $\langle v_2, v_1\rangle = -\langle v_3, v_1\rangle$ (por ser giro + reflexión; si fuera un giro solo, los productos escalares tendrían que ser iguales). Es fácil ver que $|v_2|^2 = 5 = |v_3|^2$ y $\langle v_2, v_1\rangle = 3 = -\langle v_3, v_1\rangle$. Para ver esto mejor, mirad el dibujo de la rotación más simetría en la Sección 4.2.

Puesto que podemos resolver el problema, vamos a ello.

Método 1: Una forma posible de hacerlo, que además nos da toda la información asociada (por ejemplo, el ángulo de giro), es la siguiente:

- Proyectamos v_2 y v_3 a $L^\perp$ usando Gram-Schmidt:

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{|v_1|^2} v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, v_1\rangle}{|v_1|^2} v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{3}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  Y sabemos que, puesto que $A(v_2) = v_3$, y L y $L^\perp$ son invariantes, $A(w_2) = w_3$. Convenceos de que esto es verdad mirando el dibujo.

- Ahora construimos una base ortonormal de $L^\perp$, por ejemplo:

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  Tenemos que asegurarnos de que la base $\{v_1, u_2, u_3\}$ esté bien orientada (en este caso lo está), porque de lo contrario el ángulo de giro, que vamos a calcular a continuación, nos saldrá cambiado de signo (aunque la matriz que nos piden A saldrá bien en cualquier caso).

- Ahora podemos calcular el ángulo de la rotación, viendo cuáles son los ángulos que forman w_2 y w_3 con respecto a la base de $L^\perp$ que hemos dado. Quiero encontrar θ_2 y θ_3 cumpliendo:
$$\frac{w_2}{|w_2|} = \cos(\theta_2)u_2 + \sin(\theta_2)u_3$$
$$\frac{w_3}{|w_3|} = \cos(\theta_3)u_2 + \sin(\theta_3)u_3$$
de forma que el ángulo de giro es $\theta_3 - \theta_2$. Puesto que u_2 y u_3 son una base de $L^\perp$, yo puedo escribir $\frac{w_2}{|w_2|}$ y $\frac{w_3}{|w_3|}$ como una combinación lineal de ellos:
$$\frac{w_2}{|w_2|} = u_2$$
de forma que $\cos(\theta_2) = 1$ y $\sin(\theta_2) = 0$. Deducimos que $\theta_2 = 0$. De igual manera:
$$\frac{w_3}{|w_3|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
Así tenemos que $\cos(\theta_3) = \dfrac{1}{2}$ y $\sin(\theta_3) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; entonces $\theta_3 = \pi/3$.
- Concluimos que, en la base dada por $\{v_1, u_2, u_3\}$, la aplicación A viene dada por:
$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ 0 & \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$
Y ahora para terminar, cambiamos la base. Para pasar de esta nueva base a la antigua, el cambio viene dado por:
$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$
y el cambio de la base antigua a la nueva es su transpuesta (que es la inversa):
$$B^{-1} = B^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$
La matriz buscada es
$$A = BA'B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Al terminar el ejercicio es bueno comprobar que efectivamente lleva v_1 a $-v_1$ y v_2 a v_3.

Método 2: Alternativamente, una vez hemos calculado las proyecciones de v_2 y v_3 a $L^\perp$ (vectores w_2 y w_3), como la rotación vectorial compuesta con simetría es una transformación ortogonal, podemos deducir que envía un vector ortogonal al par v_1 y w_2 a un vector ortogonal al par v_1 y w_3, y que además preserva la norma. Normalicemos los vectores:
$$\tilde{v_1} = \frac{v_1}{|v_1|}$$

$$\tilde{w_2} = \frac{w_2}{|w_2|}$$
$$\tilde{w_3} = \frac{w_3}{|w_3|}$$

Sea $u = \tilde{v_1} \times \tilde{w_2} = (-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$. Entonces, dado que A invierte la orientación (ya que es una rotación + simetría respecto a un plano), tenemos:

$$A(u) = -A(\tilde{v_1}) \times A(\tilde{w_2}) = \tilde{v_1} \times \tilde{w_3} = (-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$$

Si A hubiera sido una rotación (y por tanto, hubiera preservado la orientación) tendríamos que haber tomado $A(u) = A(\tilde{v_1}) \times A(\tilde{w_2})$.

Ahora, la aplicación, expresada de la base ortonormal $\{\tilde{v_1}, \tilde{w_2}, u\}$ a la canónica está dada por la matriz

$$A'' = (A\tilde{v_1}|A\tilde{w_2}|Au) = (-\tilde{v_1}|\tilde{w_3}|Au) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Finalmente, para obtener la matriz del endomorfismo en la base canónica cambiamos de base

$$A = A''B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con $B = (\tilde{v_1}|\tilde{w_2}|u)$.

$\square$