Vamos a calcular la función $f(x,y)$ que satisface:

$$(*)\quad \begin{cases} f_x + y\, f_y &=& y + \cos x\, f \\ f(0,y) &=& y^2 \end{cases}$$

Observa que es un problema de valores iniciales para una EDP de primer orden.

Consideramos el campo de velocidades $\mathbf{V} = \partial_x + y\,\partial_y$. Entonces $(*)$ puede reescribirse así:

$$\begin{cases} \mathbf{V} f &=& y + \cos x\, f \\ f(0,y) &=& y^2 \end{cases}$$

El flujo de $\mathbf{V}$ es: $\sigma_t(x,y) = (\, x+t\, ,\, e^t\, y\,)$. Lo vamos a utilizar para enderezar el campo $\mathbf{V}$, partiendo de una curva en $\mathbb{R}^2$ que no sea tangente a $\mathbf{V}$ en ningún punto. Lo natural es partir del eje de ordenadas, porque es la curva a lo largo de la cual se nos da el dato inicial $f(0,y) = y^2$.

Por lo tanto, las nuevas coordenadas (x_1, x_2) las damos implícitamente por:

$$(x,y) \equiv \Phi(x_1,x_2) \equiv \sigma_{x_1}(0,x_2) \equiv (\, x_1\, ,\, e^{x_1}\, x_2\,)\ .$$

Eso equivale a $(x_1,x_2) \equiv (\, x\, ,\, e^{-x}\, y\,)$.

En las coordenadas (x_1,x_2) es $\mathbf{V} \equiv \partial_{x_1}$. Vamos a reescribir $(*)$ en estas coordenadas, para lo cual introducimos la nueva incógnita $h(x_1,x_2) \equiv f \circ \Phi$. El problema de Cauchy queda así:

$$\begin{cases} h_{x_1} &=& e^{x_1}\, x_2 + \cos x_1\, h \\ h(0,x_2) &=& x_2^2 \end{cases}$$

que es una familia de problemas de valor inicial para EDOs con x_1 como variable independiente. Ahora x_2 sólo es un parámetro.

Para números $a, b \in \mathbb{R}$, la solución $u(x_1)$ de $\begin{cases} u'(x_1) &=& a\, e^{x_1} + \cos x_1\, u \\ u(0) &=& b \end{cases}$

es $u(x_1) \equiv e^{\operatorname{sen} x_1} \cdot \left(\, b + a \int_0^{x_1} e^{\xi - \operatorname{sen}\xi}\, d\xi\,\right)$. Haciendo $a = x_2$, $b = x_2^2$ obtenemos:

$$h(x_1,x_2) \equiv e^{\operatorname{sen} x_1} \cdot \left(\, x_2^2 + x_2 \int_0^{x_1} e^{\xi - \operatorname{sen}\xi}\, d\xi\,\right)\ .$$

Ahora volvemos a las coordenadas cartesianas (x,y) mediante $f \equiv h \circ \Phi^{-1}$, lo que nos da:

$$f(x,y) \equiv e^{\operatorname{sen} x} \cdot \left(\, (e^{-x}\, y)^2 + e^{-x}\, y \int_0^{x} e^{\xi - \operatorname{sen}\xi}\, d\xi\,\right)\ .$$

Comprueba que esta función es solución de $(*)$.