Un ejemplo de diferencial

Sea X el conjunto cuyos elementos son las rectas afines del plano. Sean $(U,\varphi)=(U,a,b)$, $(V,\psi)=(V,\alpha,\beta)$ las cartas dadas a X en el apartado 2.2 del libro.
Consideramos el isomorfismo lineal $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $L(x,y)\equiv(\,x+y\,,\,y\,)$, y la aplicación

$$F : X \to X \quad , \quad \ell \overset{F}{\longmapsto} \text{ la imagen de } \ell \text{ por } L\,.$$

La recta $\ell_0=\{y=2x+1\}$ es llevada a la recta $F(\ell_0)=\{3y=2x+1\}$.
Puesto que $\ell_0\in U\cap V$ y $F(\ell_0)\in U\cap V$, podemos fijar un entorno abierto E de ℓ_0 en X tal que $E\subset U\cap V$ y $F(E)\subset U\cap V$. Entonces $F|_E$ admite las cuatro representaciones numéricas:

$$\text{(1)} \qquad \big(\varphi\circ(F|_E)\circ\Phi\big)\,(a,b) \;\equiv\; \frac{(\,a\,,\,b\,)}{1+a}\,,$$

$$\text{(2)} \qquad \big(\varphi\circ(F|_E)\circ\Psi\big)\,(\alpha,\beta) \;\equiv\; \frac{(\,1\,,\,-\beta\,)}{1+\alpha}\,,$$

$$\text{(3)} \qquad \big(\psi\circ(F|_E)\circ\Phi\big)\,(a,b) \;\equiv\; \frac{(\,1+a\,,\,-b\,)}{a}$$

$$\big(\psi\circ(F|_E)\circ\Psi\big)\,(\alpha,\beta) \;\equiv\; \text{lo que sea}\,.$$

La diferencial $(dF)_{\ell_0}$ es la única aplicación $(dF)_{\ell_0}:T_{\ell_0}X\to T_{F(\ell_0)}X$ tal que:

para todo par $(\,\ell(t)\,,\,t_0\,)$, con $\ell(t)$ camino suave en X y t_0 un instante en el cual $\ell(t_0)=\ell_0$, se tiene $\boxed{(dF)_{\ell_0}\big(\ell'(t_0)\big)=(F\circ\ell)'(t_0)\,.}$

Además, esta aplicación de $T_{\ell_0}X$ a $T_{F(\ell_0)}X$ es lineal.

$\to$ Dado $\mathbf{v}_{\ell_0}\in T_{\ell_0}X$ ¿cómo calculamos $(dF)_{\ell_0}(\mathbf{v}_{\ell_0})$?

Si por ejemplo queremos usar coordenadas (a,b) en llegada, planteamos:
$(dF)_{\ell_0}(\mathbf{v}_{\ell_0})=c_1\,\partial_a|_{F(\ell_0)}+c_2\,\partial_b|_{F(\ell_0)}$. El coeficiente c_1 es la derivada de la a–coordenada de $F(\ell)$ cuando ℓ se mueve con velocidad $\mathbf{v}_{\ell_0}$, es decir: $c_1=\mathbf{v}_{\ell_0}(a\circ F)$.
Del mismo modo, el coeficiente c_2 es la derivada de la b–coordenada de $F(\ell)$ cuando ℓ se mueve con velocidad $\mathbf{v}_{\ell_0}$: $c_2=\mathbf{v}_{\ell_0}(b\circ F)$.
Si queremos usar coordenadas (α,β) en llegada: $(dF)_{\ell_0}(\mathbf{v}_{\ell_0})=c_1'\,\partial_\alpha|_{F(\ell_0)}+c_2'\,\partial_\beta|_{F(\ell_0)}$, entonces $c_1'=\mathbf{v}_{\ell_0}(\alpha\circ F)$ y $c_2'=\mathbf{v}_{\ell_0}(\beta\circ F)$ por las mismas razones.
Derivadas como $\mathbf{v}_{\ell_0}(a\circ F)$ las sabemos calcular directamente a partir de una expresión de $\mathbf{v}_{\ell_0}$ en términos de parciales cualesquiera. Por ejemplo, si usamos coordenadas (a,b) en salida y si $\mathbf{v}_{\ell_0}=\partial_a|_{\ell_0}$ entonces $\partial_a|_{\ell_0}(a\circ F)=\frac{\partial\, a\circ F\circ\Phi}{\partial a}\Big|_{(a,b)=(2,1)}$.

De (1) y de que $\big(a(\ell_0)\,,\,b(\ell_0)\big) = (2,1)$ obtenemos que $(dF)_{\ell_0}$ es la aplicación lineal $H_1 : T_{\ell_0}X \to T_{F(\ell_0)}X$ cuyo efecto sobre la base $\{\,\partial_a|_{\ell_0}\,,\,\partial_b|_{\ell_0}\,\}$ es el siguiente:

$$H_1(\partial_a|_{\ell_0}) \;=\; \left.\frac{\partial\frac{a}{1+a}}{\partial_a}\right|_{(a,b)=(2,1)} \cdot \partial_a|_{F(\ell_0)} \;+\; \left.\frac{\partial\frac{b}{1+a}}{\partial_a}\right|_{(a,b)=(2,1)} \cdot \partial_b|_{F(\ell_0)}\ ,$$

$$H_1(\partial_b|_{\ell_0}) \;=\; \left.\frac{\partial\frac{a}{1+a}}{\partial_b}\right|_{(a,b)=(2,1)} \cdot \partial_a|_{F(\ell_0)} \;+\; \left.\frac{\partial\frac{b}{1+a}}{\partial_b}\right|_{(a,b)=(2,1)} \cdot \partial_b|_{F(\ell_0)}\ ,$$

es decir:

$$(4)\qquad \begin{cases} H_1(\partial_a|_{\ell_0}) \;=\; \dfrac{1}{9}\,\partial_a|_{F(\ell_0)} \;+\; \dfrac{-1}{9}\,\partial_b|_{F(\ell_0)}\ , \\[2ex] H_1(\partial_b|_{\ell_0}) \;=\; \dfrac{1}{3}\,\partial_b|_{F(\ell_0)}\ . \end{cases}$$

De (2) y de que $\big(\alpha(\ell_0)\,,\,\beta(\ell_0)\big) = (1/2,-1/2)$ obtenemos que $(dF)_{\ell_0}$ es la aplicación lineal $H_2 : T_{\ell_0}X \to T_{F(\ell_0)}X$ cuyo efecto sobre la base $\{\,\partial_\alpha|_{\ell_0}\,,\,\partial_\beta|_{\ell_0}\,\}$ es el siguiente:

$$\partial_\alpha|_{\ell_0} \;\longmapsto\; \left.\frac{\partial\frac{1}{1+\alpha}}{\partial_\alpha}\right|_{(\alpha,\beta)=(1/2,-1/2)} \cdot \partial_a|_{F(\ell_0)} \;+\; \left.\frac{\partial\frac{-\beta}{1+\alpha}}{\partial_\alpha}\right|_{(\alpha,\beta)=(1/2,-1/2)} \cdot \partial_b|_{F(\ell_0)}\ ,$$

$$\partial_\beta|_{\ell_0} \;\longmapsto\; \left.\frac{\partial\frac{1}{1+\alpha}}{\partial_\beta}\right|_{(\alpha,\beta)=(1/2,-1/2)} \cdot \partial_a|_{F(\ell_0)} \;+\; \left.\frac{\partial\frac{-\beta}{1+\alpha}}{\partial_\beta}\right|_{(\alpha,\beta)=(1/2,-1/2)} \cdot \partial_b|_{F(\ell_0)}\ ,$$

es decir:

$$(5)\qquad \begin{cases} H_2(\partial_\alpha|_{\ell_0}) \;=\; \dfrac{-4}{9}\,\partial_a|_{F(\ell_0)} \;+\; \dfrac{-2}{9}\,\partial_b|_{F(\ell_0)}\ , \\[2ex] H_2(\partial_\beta|_{\ell_0}) \;=\; \dfrac{-2}{3}\,\partial_b|_{F(\ell_0)}\ . \end{cases}$$

Afirmamos ahora que (4) y (5) describen la misma aplicación lineal, o sea que $H_1 \equiv H_2$.

Aplicamos la fórmula $\boxed{\mathbf{v}_{\ell_0} = (\mathbf{v}_{\ell_0}\,a)\,\partial_a|_{\ell_0} + (\mathbf{v}_{\ell_0}\,b)\,\partial_b|_{\ell_0}}$ a los datos

$$(a,b) \equiv \left(\frac{1}{\alpha}\,,\,\frac{-\beta}{\alpha}\right) \text{ en } U\cap V \quad , \quad \big(\alpha(\ell_0)\,,\,\beta(\ell_0)\big) = (1/2,-1/2)\ ,$$

para obtener:

$$(6)\qquad \partial_\alpha|_{\ell_0} = -4\,\partial_a|_{\ell_0} - 2\,\partial_b|_{\ell_0} \qquad \text{y} \qquad \partial_\beta|_{\ell_0} = -2\,\partial_b|_{\ell_0}\ .$$

Sustituyendo (6) dentro de (4), vemos que:

$$H_1(\partial_\alpha|_{\ell_0}) \;=\; -4\left(\frac{1}{9}\,\partial_a|_{F(\ell_0)} + \frac{-1}{9}\,\partial_b|_{F(\ell_0)}\right) - 2\left(\frac{1}{3}\,\partial_b|_{F(\ell_0)}\right) \;=\; \frac{-4}{9}\,\partial_a|_{F(\ell_0)} \;+\; \frac{-2}{9}\,\partial_b|_{F(\ell_0)}\ ,$$

$$H_1(\partial_\beta|_{\ell_0}) \;=\; -2\left(\frac{1}{3}\,\partial_b|_{F(\ell_0)}\right) \;=\; \frac{-2}{3}\,\partial_b|_{F(\ell_0)}\ .$$

Así, H_1 definida por (4) actúa sobre $\{\,\partial_\alpha|_{\ell_0}\,,\,\partial_\beta|_{\ell_0}\,\}$ como lo hace H_2 definida por (5). Deducimos que $H_1 \equiv H_2$, o sea que (4) y (5) son definiciones de LA MISMA la aplicación lineal $(dF)_{\ell_0} : T_{\ell_0}X \to T_{F(\ell_0)}X$.

De (3) y de que $\big(a(\ell_0)\,,\,b(\ell_0)\big) = (2,1)$ obtenemos que $(dF)_{\ell_0}$ es la aplicación lineal $H_3 : T_{\ell_0}X \to T_{F(\ell_0)}X$ cuyo efecto sobre la base $\{\,\partial_a|_{\ell_0}\,,\,\partial_b|_{\ell_0}\,\}$ es el siguiente:

$$\partial_a|_{\ell_0} \quad \longmapsto \quad \left.\frac{\partial \frac{1+a}{a}}{\partial_a}\right|_{(a,b)=(2,1)} \cdot \partial_\alpha|_{F(\ell_0)} \;+\; \left.\frac{\partial \frac{-b}{a}}{\partial_a}\right|_{(a,b)=(2,1)} \cdot \partial_\beta|_{F(\ell_0)}\ ,$$

$$\partial_b|_{\ell_0} \quad \longmapsto \quad \left.\frac{\partial \frac{1+a}{a}}{\partial_b}\right|_{(a,b)=(2,1)} \cdot \partial_\alpha|_{F(\ell_0)} \;+\; \left.\frac{\partial \frac{-b}{a}}{\partial_b}\right|_{(a,b)=(2,1)} \cdot \partial_\beta|_{F(\ell_0)}\ ,$$

es decir:

$$(7) \qquad \begin{cases} H_3(\partial_a|_{\ell_0}) &= \dfrac{-1}{4}\,\partial_\alpha|_{F(\ell_0)} \;+\; \dfrac{1}{4}\,\partial_\beta|_{F(\ell_0)}\ , \\[2ex] H_3(\partial_b|_{\ell_0}) &= \qquad\qquad\qquad\quad \dfrac{-1}{2}\,\partial_\beta|_{F(\ell_0)}\ . \end{cases}$$

Aplicamos la fórmula $\boxed{\mathbf{w}_{F(\ell_0)} = \big(\mathbf{w}_{F(\ell_0)}a\big)\ \partial_a|_{F(\ell_0)} + \big(\mathbf{w}_{F(\ell_0)}b\big)\ \partial_b|_{F(\ell_0)}}$ a los datos

$$(a,b) \equiv \left(\frac{1}{\alpha}\,,\,\frac{-\beta}{\alpha}\right) \text{ en } U \cap V \quad , \quad \big(\,\alpha(F(\ell_0))\ ,\ \beta(F(\ell_0))\,\big) = (3/2, -1/2)\ ,$$

para obtener:

$$(8) \qquad \partial_\alpha|_{F(\ell_0)} = \frac{-4}{9}\,\partial_a|_{F(\ell_0)} + \frac{-2}{9}\,\partial_b|_{F(\ell_0)} \qquad \text{y} \qquad \partial_\beta|_{F(\ell_0)} = \frac{-2}{3}\,\partial_b|_{F(\ell_0)}\ .$$

Sustituyendo (8) dentro de (7), vemos que:

$$H_3(\partial_a|_{\ell_0}) \;=\; \frac{-1}{4}\left(\frac{-4}{9}\,\partial_a|_{F(\ell_0)} + \frac{-2}{9}\,\partial_b|_{F(\ell_0)}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{-2}{3}\,\partial_b|_{F(\ell_0)}\right) \;=\; \frac{1}{9}\,\partial_a|_{F(\ell_0)} + \frac{-1}{9}\,\partial_b|_{F(\ell_0)}\ ,$$

$$H_3(\partial_b|_{\ell_0}) \;=\; \frac{-1}{2}\left(\frac{-2}{3}\,\partial_b|_{F(\ell_0)}\right) \;=\; \frac{1}{3}\,\partial_b|_{F(\ell_0)}\ .$$

Luego H_3 definida por (7) hace con $\{\partial_a|_{\ell_0}, \partial_b|_{\ell_0}\}$ lo mismo que H_1 definida por (4). Deducimos que $H_1 \equiv H_3$, es decir que (4) y (7) son definiciones de LA MISMA la aplicación lineal $(dF)_{\ell_0} : T_{\ell_0}X \to T_{F(\ell_0)}X$.

Resumen. Las fórmulas (4) y (5) nos dan imágenes por la misma $(dF)_{\ell_0}$ de dos bases distintas de $T_{\ell_0}X$.
Las fórmulas (4) y (7) nos dan las imágenes por $(dF)_{\ell_0}$ de la misma base de $T_{\ell_0}X$, pero expresando estas imágenes en coordenadas diferentes.

Ejercicio. Calcula la cuarta representación numérica de $F|_E$ y comprueba que la definición que proporciona para $(dF)_{\ell_0} : T_{\ell_0}X \to T_{F(\ell_0)}X$ es equivalente a (5) [Indicación: utiliza (8)] y por lo tanto equivalente a (4) y a (7).

Nota. La fórmula $(a,b) \equiv \big(1/\alpha\,,\,-\beta/\alpha\big)$ es la representación numérica de $\mathrm{id}_{U\cap V}$ usando coordenadas (α,β) en salida y coordenadas (a,b) en llegada. Por lo tanto el cálculo hecho en (6) realmente es:

$$\partial_\alpha|_{\ell_0} = (d\,\mathrm{id})_{\ell_0}\big(\partial_\alpha|_{\ell_0}\big) = \cdots \qquad , \qquad \partial_\beta|_{\ell_0} = (d\,\mathrm{id})_{\ell_0}\big(\partial_\beta|_{\ell_0}\big) = \cdots$$

Análogamente (8) es un cálculo de $(d\,\mathrm{id})_{F(\ell_0)}$.