Ejemplo de unicidad de las coordenadas canónicas.

Sea $\mathbb{R}^2$ con las coordenadas cartesianas (x,y).
Fijamos la métrica de Riemann $g \equiv (dx)^2 + (dy)^2$ y un punto $p \in \mathbb{R}^2$.
Sea $\big(u(x,y), v(x,y)\big)$ una función tangente de 1^{er} orden a $(\, x + \mathrm{cte}_1 \,,\, y + \mathrm{cte}_2 \,)$ en p:

$$u_x(p) = 1 \ , \ u_y(p) = 0 \ , \ v_x(p) = 0 \ , \ v_y(p) = 1 \ .$$

Por el teorema de las funciones inversas, cualquier par de funciones suaves cumpliendo eso son coordenadas en algún entorno de p. El que (u,v) sean canónicas para g en p quiere decir que $g \equiv (du)^2 + (dv)^2 + R$, donde el “resto” R es un campo de formas cuadráticas

$$R \equiv A\,(du)^2 + B\,2\,du\,dv + C\,(dv)^2 \,,$$

con $A(p) = B(p) = C(p) = A_u(p) = A_v(p) = B_u(p) = B_v(p) = C_u(p) = C_v(p) = 0\,.$
Por el apartado 4.6 del libro, eso equivale a $R \equiv \widetilde{A}\,(dx)^2 + \widetilde{B}\,2\,dx\,dy + \widetilde{C}\,(dy)^2$ con

$$\widetilde{A}(p) = \widetilde{B}(p) = \widetilde{C}(p) = \widetilde{A}_x(p) = \widetilde{A}_y(p) = \widetilde{B}_x(p) = \widetilde{B}_y(p) = \widetilde{C}_x(p) = \widetilde{C}_y(p) = 0 \ .$$

La identidad $R \equiv g - (du)^2 - (dv)^2$ equivale al sistema de identidades:

$$\widetilde{A} \equiv 1 - u_x^2 - v_x^2 \quad , \quad \widetilde{B} \equiv -u_x\,u_y - v_x\,v_y \quad , \quad \widetilde{C} \equiv 1 - u_y^2 - v_y^2 \ .$$

Los valores de $u_x(p), u_y(p), v_x(p), v_y(p)$ garantizan que $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}$ se anulan en p. La anulación de las derivadas 1^{as} de $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}$ en p se traduce en el siguiente sistema de condiciones sobre (u,v):

$0 = \partial_x|_p\,(1 - u_x^2 - v_x^2) = \big(-2\underbrace{u_x}_{1}u_{xx} - 2\underbrace{v_x}_{0}v_{xx}\big)_p = -2\,u_{xx}(p)\ ,$

$0 = \partial_y|_p\,(1 - u_x^2 - v_x^2) = \big(-2u_xu_{xy} - 2v_xv_{xy}\big)_p = -2\,u_{xy}(p)\ ,$

$0 = \partial_x|_p\,(-u_xu_y - v_xv_y) = \big(-u_{xx}\underbrace{u_y}_{0} - \underbrace{u_x}_{1}u_{yx} - v_{xx}\underbrace{v_y}_{1} - \underbrace{v_x}_{0}v_{yx}\big)_p = -u_{yx}(p) - v_{xx}(p)\,,$

$0 = \partial_y|_p\,(-u_xu_y - v_xv_y) = \big(-u_{xy}u_y - u_xu_{yy} - v_{xy}v_y - v_xv_{yy}\big)_p = -u_{yy}(p) - v_{xy}(p)\,,$

$0 = \partial_x|_p\,(1 - u_y^2 - v_y^2) = \big(-2u_yu_{yx} - 2v_yv_{yx}\big)_p = -2\,v_{yx}(p)\ ,$

$0 = \partial_y|_p\,(1 - u_y^2 - v_y^2) = \big(-2u_yu_{yy} - 2v_yv_{yy}\big)_p = -2\,v_{yy}(p)\ .$

Hacemos las siguientes observaciones:

→ Sólo aparecen condiciones sobre las derivadas 2^{as} de (u,v) en p.

→ Esas condiciones son lineales.

→ Hay el mismo número de ecuaciones que de incógnitas: 6 ecuaciones para 6 números.

El sistema es:

$$\begin{cases} u_{xx}(p) = 0 \\ u_{xy}(p) = 0 \\ u_{yx}(p) + v_{xx}(p) = 0 \\ v_{xy}(p) + u_{yy}(p) = 0 \\ v_{yx}(p) = 0 \\ v_{yy}(p) = 0 \end{cases}$$

Concluimos que (u,v), tangentes de 1^{er} orden a $(x,y)+\mathbf{c}$ en p, son coordenadas canónicas para g en p si y sólo si $u_{xx}(p)=u_{xy}(p)=u_{yy}(p)=v_{xx}(p)=v_{xy}(p)=v_{yy}(p)=0$. O sea, si y sólo si (u,v) es tangente de 2^{o} orden a $(x,y)+\mathbf{c}$ en p.

Sean ahora $(\overline{u},\overline{v})$ coordenadas canónicas para g en p, pero no necesariamente tangentes a $(x,y)+\mathbf{c}$ en p. La matriz $\begin{bmatrix} \overline{u}_x(p) & \overline{u}_y(p) \\ \overline{v}_x(p) & \overline{v}_y(p) \end{bmatrix}$ es invertible pero no necesariamente igual a la identidad. Entonces el sistema 6×6 que acabamos de considerar se complica un poco, pero resulta que de nuevo equivale a $\overline{u}_{xx}(p)=\overline{u}_{xy}(p)=\overline{u}_{yy}(p)=\overline{v}_{xx}(p)=\overline{v}_{xy}(p)=\overline{v}_{yy}(p)=0$.

Ejercicio. Halla el tal sistema 6×6 y demuestra esta última afirmación.

Es decir que $\varphi\equiv(\overline{u},\overline{v})$ tiene que ser tangente de 2^{o} orden en p a la función afín $\mathbf{f}\equiv(\overline{x},\overline{y})$ que cumple $\mathbf{f}(p)=\varphi(p)$ y $(d\mathbf{f})_p=(d\varphi)_p$. Esto concuerda con el hecho de que todas las coordenadas afines en el plano son canónicas para g en p.

He aquía la primera utilidad (¡no la única!) de esta teoría:

Corolario. Toda isometría local del plano euclídeo $(\mathbb{R}^2, (dx)^2+(dy)^2)$ consigo mismo es una aplicación afín.

Demostración. Que $F\equiv(f_1,f_2)$ sea isometría local significa que $g\equiv F^*g\equiv(df_1)^2+(df_2)^2$, luego (f_1,f_2) son coordenadas canónicas para g en todo punto. Por lo que acabamos de ver, las derivadas segundas (respecto de x,y) de f_1 y las de f_2 son nulas en todo punto. Esto obliga a f_1,f_2 a ser polinomios de 1^{er} grado en (x,y), o sea funciones afines.

Es ahora fácil deducir que $F(\mathbf{v})\equiv A\,\mathbf{v}+\mathbf{c}$ con A matriz **ortogonal,** y que F ha de ser una de éstas: una traslación, o una rotación alrededor de un punto, o la simetría respecto de una recta afín, o una simetría deslizante.