Manejo de campos.

Pegando trozos

En el libro se dice que una manera de definir un campo suave en una unión $U \cup V$ es dar campos suaves en U y en V que sean idénticos en la intersección $U \cap V$. Lo típico es que U y V sean cartas, pues es especialmente fácil dar campos suaves en ellas.
Como ejemplo, sea $\mathbb{R}^3$ con las coordenadas cartesianas (x, y, z) y la subvariedad $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ dada por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. En el apartado 2.2 del libro se ha dado el atlas $\{(U, \varphi), (W, \xi)\}$ para la estructura de subvariedad de S^2, cuyas aplicaciones coordenadas y parametrizaciones asociadas son:

$$\begin{cases} \varphi(x, y, z) = \dfrac{(x, y)}{1 - z}\,, \\ z \neq 1 \end{cases} \quad , \quad \Phi(a, b) = \frac{(\,2a\,,\,2b\,,\,a^2 + b^2 - 1\,)}{1 + a^2 + b^2}$$

$$\begin{cases} \xi(x, y, z) = (x, y) \\ z > 0 \end{cases} \quad , \quad \Xi(x_1, x_2) = \left(x_1\,,\,x_2\,,\,+\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\; \right) .$$

Definimos un campo de velocidades $\mathbf{V}$ en $U = S^2 - \{\textsc{n}\}$ mediante $\mathbf{V} \equiv -b\,\partial_a + a\,\partial_b$. Este campo es obviamente suave, y nos preguntamos si se extiende al polo norte de modo que resulte un campo suave en todo S^2. Para eso necesitamos echar mano de la carta (W, ξ) y hallar la expresión numérica de $\mathbf{V}|_{U\cap W}$ en las coordenadas (x_1, x_2).

Pregunta: ¿Cómo transformamos la expresión numérica de un campo al cambiar de coordenadas?

Hay una respuesta para cada tipo de campo:

→ Para campos de velocidades, todo lo que necesitas utilizar es la identidad: $\mathbf{V} \equiv (\mathbf{V}x_1)\,\partial_{x_1} + \cdots + (\mathbf{V}x_n)\,\partial_{x_n}$.

→ Para campos de formas (lineales o cuadráticas) se SUSTITUYEN todas las funciones de la expresión numérica por sus expresiones en las coordenadas deseadas.

En nuestro caso $\mathbf{V}|_{U\cap W} \equiv (\mathbf{V}x_1)\,\partial_{x_1} + (\mathbf{V}x_2)\,\partial_{x_2}$ y, como el campo $\mathbf{V}$ viene dado mediante derivaciones parciales respecto de las coordenadas (a, b), para poder calcular las funciones $\mathbf{V}x_1$ y $\mathbf{V}x_2$ hemos de escribir x_1 y x_2 como expresiones en (a, b). Llegamos a que:

$$\mathbf{V}|_{U\cap W} \equiv \left((-b\,\partial_a + a\,\partial_b)\,\frac{2a}{1 + a^2 + b^2} \right) \partial_{x_1} + \left((-b\,\partial_a + a\,\partial_b)\,\frac{2b}{1 + a^2 + b^2} \right) \partial_{x_2} \,.$$

Ayuda mucho a calcular eso el observar que $(-b\,\partial_a + a\,\partial_b)\,(1 + x^2 + y^2) \equiv 0$, con lo cual sólo tenemos que derivar los numeradores de las fracciones. El resultado es:

$$\mathbf{V}|_{U\cap W} \equiv \frac{-2b}{1 + a^2 + b^2}\,\partial_{x_1} + \frac{2a}{1 + a^2 + b^2}\,\partial_{x_2} \equiv -x_2\,\partial_{x_1} + x_1\,\partial_{x_2} \,.$$

La expersión que nos ha salido tiene también sentido en el polo norte, y nos muestra que el campo extendido también es suave allí. Hemos construido un campo suave de velocidades en la esfera.

Construyamos ahora un campo suave de formas lineales. Empezamos por definirlo en W como $\omega \equiv x_2^2\, dx_1$. Hallemos la expresión numérica de $\omega|_{U\cap W}$ en las coordenadas (a,b). Para ello sustituimos las funciones x_2^2 y x_1 por sus expresiones en términos de (a,b):

$$\omega|_{U\cap W} \equiv \left(\frac{2b}{1+a^2+b^2}\right)^2 d\,\frac{2a}{1+a^2+b^2}$$

Desarrollado y reagrupado, nos queda:

$$\omega|_{U\cap W} \equiv \frac{8b^2}{(1+a^2+b^2)^4}\ \big(\, (1-a^2+b^2)\, da + (-2ab)\, db\, \big)\ .$$

La expresión que nos ha salido tiene sentido y es suave en todo U, con lo cual nos proporciona una extensión de ω a un campo suave en todo S^2 de formas lineales.
¡Ojo! Esta es una entre infinitas posibles maneras de extender ω suavemente de W a S^2, pues en el abierto $S^2 - \overline{W}$ es posible modificar el campo sin que deje de ser suave. No era así para un campo dado en U, debido a que $\overline{U} = S^2$.

Definimos en W el campo de formas cuadráticas $Q \equiv (dx_1)^2$. Entonces:

$$Q|_{U\cap W} \equiv \left(d\,\frac{2a}{1+a^2+b^2} \right)^2 \equiv 4 \left(\frac{(1-a^2+b^2)\, da + (-2ab)\, db}{(1+a^2+b^2)^2} \right)^2 ,$$

que desarrollado da:

$$Q|_{U\cap W} \equiv \frac{4}{(1+a^2+b^2)^4}\ \big(\, (1-a^2+b^2)\,(da)^2 + (-2ab)(1-a^2+b^2)\, 2\, da\, db + 4a^2b^2\,(db)^2\, \big)\ ,$$

fórmula que tiene sentido y es suave en todo U. Extiende Q suavemente (de una entre infinitas posibles maneras) de W a S^2.

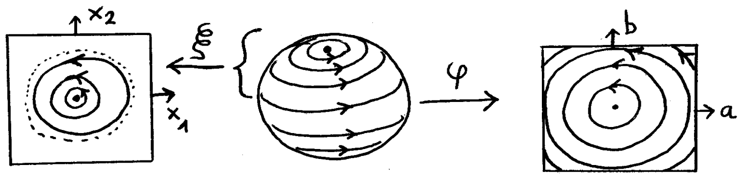
La condición de tangencia

Sea Y una subvariedad de X y sea $i: Y \hookrightarrow X$ la inclusión. En el libro se dice que un campo de velocidades $\mathbf{V}_0$ en X es **tangente a** Y si para todo $p \in Y$ existe una velocidad $\mathbf{v}_p \in T_pY$ tal que $\mathbf{V}_{0p} = (di)_p(\mathbf{v}_p)$. De existir, estas $\mathbf{v}_p$ son únicas y forman un campo de velocidades en Y que denotamos $\mathbf{V}_0|_Y$. Además el campo inducido $\mathbf{V}_0|_Y$ hereda la suavidad de $\mathbf{V}_0$.
También se da en el libro la condición para que $\mathbf{V}_0$ sea tangente a una subvariedad definida por ecuaciones. Si por ejemplo tomamos en $\mathbb{R}^3$ el campo de velocidades $\mathbf{V}_0 \equiv -y\,\partial_x + x\,\partial_y$ entonces es inmediato que $\big(\mathbf{V}_0(x^2+y^2+z^2-1)\big)_p = 0$ para todo $p \in S^2$, luego $\mathbf{V}_0$ es tangente a S^2 e induce un campo de velocidades en la esfera $\mathbf{V}_0|_{S^2}$.
Un punto de vista más geométrico es el siguiente. Un campo de velocidades $\mathbf{V}_0$ en X es tangente a la subvariedad Y si y sólo si Y es unión de trayectorias[1] de $\mathbf{V}_0$. En tal caso los caminos integrales del campo inducido son precisamente aquellos caminos integrales de $\mathbf{V}_0$ que están contenidos en Y.

[1] no necesariamente maximales.

Podemos ahora entender visualmente el ejemplo de la esfera. El flujo de $\mathbf{V}_0 \equiv -y\,\partial_x + x\,\partial_y$ en $\mathbb{R}^3$ hace rotar el espacio alrededor del eje z con velocidad angular constante de un radián por unidad de tiempo. Las trayectorias son circunferencias o puntos, y la esfera S^2 es unión de algunas de esas trayectorias: los polos norte y sur y los paralelos. Por lo tanto el flujo del campo inducido $\mathbf{V}_0|_{S^2}$ consiste en rotar la esfera alrededor de los polos con la mencionada velocidad angular.

Tanto la proyección estereográfica φ como la proyección ortogonal ξ llevan cada giro alrededor de los polos de S^2 al giro del mismo ángulo alrededor del origen en el plano. Esto implica que la expresión de $\mathbf{V}_0|_{S^2}$ en las coordenadas (a,b) es $-b\,\partial_a + a\,\partial_b$ y que la expresión de $\mathbf{V}_0|_{S^2}$ en las coordenadas (x_1,x_2) es $-x_2\,\partial_{x_1} + x_1\,\partial_{x_2}$.



Luego $\mathbf{V}_0|_{S^2}$ es en realidad el campo $\mathbf{V}$ que construimos al principio de este documento. La "curiosa" igualdad de las expresiones de $\mathbf{V}$ en los dos sistemas de coordenadas no era casualidad, sino que se debía a propiedades geométricas particulares de las proyecciones φ y ξ .

¿Y si no somos capaces de calcular las trayectorias? La receta para deducir que $\mathbf{V}_0|_{S^2} \equiv \mathbf{V}$ por cálculo directo de derivadas es la siguiente. Dados $p \in S^2$ y una velocidad $\mathbf{v}_p \in T_pS^2$, la velocidad $(di)_p(\mathbf{v}_p) \in T_p\mathbb{R}^3$ viene dada por:

$$\begin{aligned}(di)_p(\mathbf{v}_p) &= \big((di)_p(\mathbf{v}_p)x\big)\,\partial_x|_p + \big((di)_p(\mathbf{v}_p)y\big)\,\partial_y|_p + \big((di)_p(\mathbf{v}_p)z\big)\,\partial_z|_p = \\ &= \big(\mathbf{v}_p(x\circ i)\big)\,\partial_x|_p + \big(\mathbf{v}_p(y\circ i)\big)\,\partial_y|_p + \big(\mathbf{v}_p(z\circ i)\big)\,\partial_z|_p = \\ &= \big(\mathbf{v}_p(x|_{S^2})\big)\,\partial_x|_p + \big(\mathbf{v}_p(y|_{S^2})\big)\,\partial_y|_p + \big(\mathbf{v}_p(z|_{S^2})\big)\,\partial_z|_p\ ,\end{aligned}$$

luego $(di)_p(\mathbf{v}_p) = \mathbf{V}_{0p}$ equivale a las siguientes igualdades:

$$\mathbf{v}_p(x|_{S^2}) = -y(p) \quad , \quad \mathbf{v}_p(y|_{S^2}) = x(p) \quad , \quad \mathbf{v}_p(z|_{S^2}) = 0\ ,$$

y la identidad $\mathbf{V} \equiv \mathbf{V}_0|_{S^2}$ equivale a las identidades:

$$(1) \qquad \mathbf{V}(x|_{S^2}) \equiv -y|_{S^2} \quad , \quad \mathbf{V}(y|_{S^2}) \equiv x|_{S^2} \quad , \quad \mathbf{V}(z|_{S^2}) \equiv 0\ .$$

Si $x(a,b), y(a,b), z(a,b)$ son las funciones componentes de la parametrización $\Phi(a,b)$, las identidades (1) se cumplen en U si y sólo si tenemos las siguientes identidades entre funciones de (a,b):

$$(2) \qquad -b\,x_a + a\,x_b \equiv -y \quad , \quad -b\,y_a + a\,y_b \equiv x \quad , \quad -b\,z_a + a\,z_b \equiv 0\ ,$$

que se comprueban muy fácilmente. Entonces $\mathbf{V}|_U \equiv \mathbf{V}_0|_U$ y, como U es denso en S^2, tenemos $\mathbf{V} \equiv \mathbf{V}_0|_{S^2}$. La receta es muy fácil de usar, pero no nos da ninguna luz sobre la geometría de la situación.

Inducción de campos de formas

Ante todo, quede bien claro que la condición de tangencia es necesaria para que un campo de velocidades $\mathbf{V}_0$ pueda inducir uno en una subvariedad: si $\mathbf{V}_0$ no es tangente a la subvariedad, entonces no induce nada en ella.

En cambio, un campo μ de formas (lineales o cuadráticas) en X induce uno en cada subvariedad SIN QUE MEDIE CONDICIÓN ALGUNA. El proceso es tan sencillo como esto: si Y es subvariedad de X y si $i : Y \hookrightarrow X$ es la inclusión, para cada $p \in Y$ el espacio T_pY se identifica mediante $(di)_p$ a un subespacio vectorial de T_pX y dejamos que la forma μ_p actúe sobre los elementos de $(di)_p(T_pY)$. Esto es en realidad un caso particular de los campos inducidos que se explican en el libro.

Veamos la situación general. Una aplicación suave entre variedades $F : X_1 \to X_2$ induce otra aplicación, también suave:

$$\begin{aligned} F_* : TX_1 &\longrightarrow \quad TX_2 \\ \mathbf{v}_p &\longmapsto (dF)_p(\mathbf{v}_p) \end{aligned}$$

Esta aplicación EMPUJA las velocidades de la variedad de salida X_1 a la variedad de llegada X_2.
Un campo μ de formas en X_2 puede verse como una función $\mu : TX_2 \to \mathbb{R}$ de un cierto tipo. Entonces F TRAE el campo μ, definido en la variedad de llegada X_2, al campo $F^*\mu$ que se define en la variedad de salida X_1 mediante $F^*\mu \equiv \mu \circ F_* : TX_1 \to \mathbb{R}$.
El campo inducido por μ en una subvariedad es el caso particular $i^*\mu$ de esta construcción.

El cálculo del campo inducido $F^*\mu$ es fácil con las fórmulas del ejercicio 1 de la lista 5. Por ejemplo: $F^*\big(f_1\,(dx_1)^2 + f_2\,2\,dx_1\,dx_2\big) = (f_1 \circ F)\,\big(d(x_1 \circ F)\big)^2 + 2\,(f_2 \circ F)\,d(x_1 \circ F)\,d(x_2 \circ F)$.
Las funciones $x_1 \circ F$, $x_2 \circ F$ constituyen la representación numérica de F. En particular, la transformación de la expresión numérica de μ de unas coordenadas a otras es el cálculo de $\mu \equiv \mathrm{id}^*\mu$.

> Hemos visto dos aspectos en los que los campos de formas son muy distintos de los campos de velocidades.
> En primer lugar, un campo de formas no suele poderse enderezar mientras que los de velocidades sí. En segundo lugar, un campo de formas siempre induce uno en las subvariedades, mientras que un campo de velocidades necesita cumplir una condición de tangencia a la subvariedad para hacer eso.
> En general, es más fácil calcular con campos de formas que con campos de velocidades, aunque aquéllos nos puedan parecer más abstractos que éstos.

Nota. Dadas $X_1 \xrightarrow{F} X_2 \xrightarrow{G} X_3$, aplicaciones suaves, la regla de la cadena se expresa por la identidad $(G \circ F)_* \equiv G_* \circ F_*$.
Se deduce que para todo campo de formas μ en X_3 es $(G \circ F)^*\mu = F^*G^*\mu$, es decir que $(G \circ F)^* \equiv F^* \circ G^*$.