Las métricas de Riemann no suelen poderse enderezar.

Hemos visto que todo campo de velocidades $\mathbf{V}$ que no se anule en ningún punto se puede enderezar en regiones suficientemente pequeñas: dado un punto p encontramos un entorno U de p y unas coordenadas $(x_1, ..., x_n)$ en U tales que $\mathbf{V}|_U \equiv \partial_{x_1}$.

Los campos de formas lineales (también llamados **formas de Pfaff**) no suelen poderse enderezar, en el siguiente sentido: una forma de Pfaff ω no suele poderse expresar localmente como dx_1 a menos que cumpla unas identidades "de derivadas cruzadas". Las formas de Pfaff son, pues, muy distintas de los campos de velocidades.

Las métricas de Riemann tampoco suelen poderse enderezar. Vamos a examinar esta cuestión para $\dim = 2$ y para métricas que en unas coordenadas fijadas (x, y) se ponen como $E(x,y) \cdot \big((dx)^2 + (dy)^2 \big)$, con $E(x,y)$ una función positiva y suave. Aquí "enderezar" quiere decir que nos preguntamos si en pequeños dominios existen coordenadas (u, v) tales que sea $E(x,y) \cdot \big((dx)^2 + (dy)^2 \big) \equiv (du)^2 + (dv)^2$.

Sea $\mathbb{R}^2_{xy}$ el plano numérico de coordenadas xy y en él la métrica de Riemann $g_1 \equiv (dx)^2 + (dy)^2$. Sea asimismo $\mathbb{R}^2_{uv}$ el plano numérico de coordenadas uv y en él la métrica de Riemann $g_2 \equiv (du)^2 + (dv)^2$. En realidad g_1 y g_2 son la estructura euclídea usual.
Tenemos un pequeño abierto $A \subset \mathbb{R}^2_{xy}$ y nos preguntamos si hay una aplicación suave $\varphi \equiv (\, u(x,y) \,,\, v(x,y) \,) : A \to \mathbb{R}^s_{uv}$ que cumpla lo siguiente:

$$\forall p \in A \quad \forall\, \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p \in T_pA \qquad E(p) \cdot g_1(\, \mathbf{v}_p \,,\, \mathbf{w}_p \,) = g_2\big(\, (d\varphi)_p(\mathbf{v}_p) \,,\, (d\varphi)_p(\mathbf{w}_p) \,\big) \;.$$

Dicho de otro modo, para cada $p \in A$ la siguiente aplicación lineal entre espacios euclídeos:

$$(d\varphi)_p \;:\; \big(\, T_p\mathbb{R}^2_{xy} \,,\; E(p) \cdot g_{1\,p} \,\big) \longrightarrow \big(\, T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^2_{uv} \,,\; g_{2\,\varphi(p)} \,\big)$$

tiene que ser **ortogonal.** Esto tendría la siguiente consecuencia sobre la medida de ángulos:

$$\cos \angle_{g_2}\big(\, (d\varphi)_p(\mathbf{v}_p) \,,\, (d\varphi)_p(\mathbf{w}_p) \,\big) =$$

$$= \frac{g_2\big(\, (d\varphi)_p(\mathbf{v}_p) \,,\, (d\varphi)_p(\mathbf{w}_p) \,\big)}{\sqrt{g_2\big(\, (d\varphi)_p(\mathbf{v}_p) \,,\, (d\varphi)_p(\mathbf{v}_p) \,\big) \cdot g_2\big(\, (d\varphi)_p(\mathbf{w}_p) \,,\, (d\varphi)_p(\mathbf{w}_p) \,\big)}} =$$

$$= \frac{E(p) \cdot g_1\big(\, \mathbf{v}_p \,,\, \mathbf{w}_p \big)}{\sqrt{E(p) \cdot g_1\big(\, \mathbf{v}_p \,,\, \mathbf{v}_p \,\big) \cdot E(p) \cdot g_1\big(\, \mathbf{w}_p \,,\, \mathbf{w}_p \,\big)}} = \frac{g_1\big(\, \mathbf{v}_p \,,\, \mathbf{w}_p \big)}{\sqrt{g_1\big(\, \mathbf{v}_p \,,\, \mathbf{v}_p \,\big) g_1\big(\, \mathbf{w}_p \,,\, \mathbf{w}_p \,\big)}} \;,$$

de donde:

$$\angle_{g_2}\big(\, (d\varphi)_p(\mathbf{v}_p) \,,\, (d\varphi)_p(\mathbf{w}_p) \,\big) = \angle_{g_1}\big(\, \mathbf{v}_p \,,\, \mathbf{w}_p \,\big) \;,$$

luego $\varphi : A \to \mathbb{R}^2$ sería **conforme** en el sentido clásico: si dos caminos α, β en A se cruzan en p haciendo ángulo euclídeo θ, entonces los caminos $\varphi \circ \alpha$, $\varphi \circ \beta$ se cruzarían en $\varphi(p)$ haciendo el mismo ángulo euclídeo θ.

Para cualquier función $v(x,y)$ es obvio que $(dv)^2 = (-dv)^2 = (d(-v))^2$. Luego en realidad tendríamos $E \cdot g_1 \equiv (du)^2 + (d(\pm v))^2$ y, eligiendo adecuadamente el signo, las jacobianas de $\varphi : A \to \mathbb{R}^2$ tendrían determinante positivo.

Entonces $\varphi \equiv (u(x,y), v(x,y))$ sería conforme y con determinante jacobiano positivo, o sea que la función $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ sería holomorfa en la variable compleja $z = x + iy$.

La función $E(x,y)$ vendría determinada por la función holomorfa $f(z)$ en la manera siguiente:

$$\begin{aligned} E(z) &= E(z) \cdot g_1 \big(\partial_x|_z \, , \, \partial_x|_z \big) = \\ &= g_2 \big(\, (d\varphi)_z(\partial_x|_z) \, , \, (d\varphi)_z(\partial_x|_z) \, \big) = \\ &= \varphi_x(z) \cdot \varphi_x(z) \; = \; |f'(z)|^2 \, . \end{aligned}$$

Puesto que E es suave y positiva, es $E \equiv e^{2\,h(x,y)}$ con $h(x,y)$ función suave.

En definitiva, para que existan coordenadas (u,v) tales que sea $e^{2\,h} \cdot g_1 \equiv (du)^2 + (dv)^2$ en un pequeño dominio A es necesario que exista $f(z)$ holomorfa en A y tal que

$$\text{para } z \in A \qquad h(z) = \log |f'(z)| = \mathrm{Re} \big(\, \log f'(z) \, \big) \, .$$

Pero si $f(z)$ es holomorfa entonces $f'(z)$ y $\log f'(z)$ son holomorfas (la segunda función, tal vez multivaluada), luego es necesario que h sea en A la parte real de una función holomorfa. Es bien sabido que esto requiere que h sea **armónica** en A, es decir que su laplaciano $\Delta h \overset{\text{def}}{=} h_{xx} + h_{yy}$ sea nulo en todo punto de A.

> Es fácil dar funciones suaves $h(x,y)$ cuyo laplaciano Δh no es idénticamente nulo en ningún abierto.
> Si h es una cualquiera de tales funciones entonces no existen, en ningún dominio abierto por pequeño que sea, coordenadas (u,v) que en tal dominio nos den $e^{2\,h} \cdot \big((dx)^2 + (dy)^2 \big) \equiv (du)^2 + (dv)^2$.

Igual le pasa a las métricas de Riemann de tipo general $E\,(dx)^2 + F\,2\,dxdy + G\,(dy)^2$ (ya lo veremos). Lo mismo para dimensión mayor que 2.
Una métrica de Riemann "no enderezable" en una variedad X define en X una **estructura no euclídea** que es interesante estudiar. La **Geometría Riemanniana** se ocupa de dicho estudio.