Ejercicio 1 de la página 8 de las hojas. Soluciones

Bernoulli. Tenemos una variable X que es Bernoulli(p) con p desconocido. Queremos hallar una estimación $\widehat{p}$ del parámetro p a partir de una muestra de tamaño n.

Método de los momentos (en realidad, del primer momento). La estimación es el valor de p para el cual

$$\text{primer momento poblacional} \;=\; \text{primer momento muestral}\,,$$

que equivale a la ecuación $p = \overline{x}$, cuya solución es $\boxed{\widehat{p} = \overline{x}}$

Método de máxima verosimilitud. La función de verosimilitud conjunta de las variables $X_1, \ldots, X_n$ es

$$\begin{aligned} L(x_1, \ldots, x_n; p) &= \left(p^{x_1}(1-p)^{1-x_1}\right)\left(p^{x_2}(1-p)^{1-x_2}\right)\cdots\left(p^{x_n}(1-p)^{1-x_n}\right) = \\ &= p^{\sum x_i}\cdot(1-p)^{n-\sum x_i}\,. \end{aligned}$$

Metemos en las x_i los datos de la muestra e igualamos a cero la derivada $\frac{d}{dp}\log L$, lo que nos da la ecuación:

$$\frac{\sum x_i}{p} \;=\; \frac{n-\sum x_i}{1-p}\,,$$

cuya solución es, de nuevo, $\boxed{\widehat{p} = \overline{x}}$

Poisson. Tenemos una variable X que es Poisson(λ) con λ desconocido. Queremos hallar una estimación $\widehat{\lambda}$ del parámetro λ a partir de una muestra de tamaño n.

Método de los momentos (en realidad, del primer momento). La ecuación es $\lambda = \overline{x}$, con solución $\boxed{\widehat{\lambda} = \overline{x}}$

Método de máxima verosimilitud. La función de verosimilitud conjunta de las variables $X_1, \ldots, X_n$ es

$$L(x_1, \ldots, x_n; \lambda) \;=\; \left(\frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}e^{-\lambda}\right)\left(\frac{\lambda^{x_2}}{x_2!}e^{-\lambda}\right)\cdots\left(\frac{\lambda^{x_n}}{x_n!}e^{-\lambda}\right) \;=\; \frac{\left(\lambda^{\sum x_i}\right)\cdot e^{-n\lambda}}{x_1!\cdots x_n!}\,,$$

de donde:

$$\log L \;=\; \text{cte} - n\lambda + \left(\textstyle\sum x_i\right)\cdot\log\lambda\,.$$

Igualar $\frac{d}{d\lambda}\log L$ a cero da la ecuación $0 = -n + \frac{\sum x_i}{\lambda}$, cuya solución es, de nuevo, $\boxed{\widehat{\lambda} = \overline{x}}$

Exponencial. Tenemos una variable X que es Exponencial(λ) con λ desconocido. Queremos hallar una estimación $\widehat{\lambda}$ del parámetro λ a partir de una muestra de tamaño n.

Método de los momentos (en realidad, del primer momento). La ecuación es $1/\lambda = \overline{x}$, con solución $\boxed{\widehat{\lambda} = 1/\overline{x}}$

Método de máxima verosimilitud. La función de verosimilitud conjunta de las variables $X_1, \ldots, X_n$ es

$$L(x_1, \ldots, x_n; \lambda) \;=\; \left(\lambda\, e^{-\lambda x_1}\right)\left(\lambda\, e^{-\lambda x_2}\right)\cdots\left(\lambda\, e^{-\lambda x_n}\right) \;=\; \lambda^n\, e^{-\lambda\sum x_i}\,,$$

luego $\log L = n\log\lambda - \left(\sum x_i\right)\,\lambda$.

Igualar $\frac{d}{d\lambda}\log L$ a cero da la ecuación $0 = \frac{n}{\lambda} - \sum x_i$, cuya solución es, de nuevo, $\boxed{\widehat{\lambda} = 1/\overline{x}}$

Normal, los dos parámetros desconocidos. Tenemos una variable X que es $N(\mu;\sigma)$, con μ y σ ambos desconocidos. Queremos hallar estimaciones $\widehat{\mu},\widehat{\sigma}$ para esos parámetros a partir de una muestra de tamaño n.

Método de los momentos Para determinar dos números $\widehat{\mu},\widehat{\sigma}$ necesitamos dos ecuaciones. Por lo tanto utilizamos los momentos primero y segundo. Resulta el sistema:

$$\begin{cases} \mu &= \overline{x} \\ \mu^2+\sigma^2 &= \frac{1}{n}\sum x_i^2 \end{cases}$$

cuyas soluciones son:

$$\boxed{\widehat{\mu} = \overline{x} \quad , \quad \widehat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \overline{x}^2} = \sqrt{v_x}}$$

Método de máxima verosimilitud. La función de verosimilitud conjunta de las variables $X_1,\ldots,X_n$ es la siguiente función de $n+2$ variables:

$$\begin{aligned} L(x_1,\ldots,x_n;\mu,\sigma) &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x_1-\mu)^2/2\sigma^2}\right)\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x_2-\mu)^2/2\sigma^2}\right)\cdots\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x_n-\mu)^2/2\sigma^2}\right) = \\ &= \mathrm{Cte}\cdot\sigma^{-n}\cdot e^{-\sum(x_i-\mu)^2/2\sigma^2}, \end{aligned}$$

de donde:

$$\log L = \mathrm{cte} - n\log\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2 .$$

Metemos en las x_i los datos de la muestra, lo que produce una función $L(\mu,\sigma)$ de sólo dos variables, y la estimación es el par $(\widehat{\mu},\widehat{\sigma})$ que da el máximo valor de esta función. Determinamos dicho par como solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial}{\partial\mu}\log L = \frac{1}{\sigma^2}\sum(x_i-\mu) \\ 0 = \frac{\partial}{\partial\sigma}\log L = \frac{-n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}\sum(x_i-\mu)^2 \end{cases}$$

y de nuevo obtenemos $\boxed{\widehat{\mu}=\overline{x}\ ,\ \widehat{\sigma}=\sqrt{v_x}}$

Normal $N(\,\mu\,;3'7)$ (por ejemplo). Ahora sólo el parámetro μ es desconocido y buscamos una estimación $\widehat{\mu}$ para él, a partir de una muestra de tamaño n.

Método de los momentos En este caso basta con utilizar el primer momento. La ecuación es $\mu=\overline{x}$ y su solución es $\boxed{\widehat{\mu}=\overline{x}}$

Método de máxima verosimilitud. Tenemos $\log L(\mu)=\mathrm{cte}-n\log 3'7-\sum(x_i-\mu)^2/2(3'7)^2$. La ecuación $0=\frac{d}{d\mu}\log L(\mu)=-\sum 2(-1)(x_i-\mu)/2(3'7)^2$ tiene solución $\boxed{\widehat{\mu}=\overline{x}}$

Normal $N(\,-2'9\,;\,\sigma)$ (por ejemplo). Ahora sólo el parámetro σ es desconocido y buscamos una estimación $\widehat{\sigma}$ para él, a partir de una muestra de tamaño n.

Método de los momentos En este caso utilizamos *sólo el segundo momento.* La ecuación es $(-2'9)^2+\sigma^2=\frac{1}{n}\sum x_i^2$ y su solución $\widehat{\sigma}_1=\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum x_i^2\right)-(-2'9)^2}$.

Máxima verosimilitud. La ecuación $0=\frac{d}{d\sigma}\log L(\sigma)=\frac{-n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}\sum(x_i+2'9)^2$ tiene solución $\widehat{\sigma}_2=\sqrt{\frac{1}{n}\sum(x_i+2'9)^2}$.

Será $\widehat{\sigma}_1\neq\widehat{\sigma}_2$, a menos que la muestra cumpla $\overline{x}=-2'9$.