

## ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

### Hoja 6. ESPACIO AFÍN II. COORDENADAS CARTESIANAS Y BARICÉNTRICAS.

1. Sea  $\mathfrak{R} = \{O : \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  un sistema de referencia cartesiano en el espacio afín  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$  respecto del cual el punto  $p$  tiene coordenadas  $(0, -1)$ . Construye otro sistema de referencia en  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$  respecto del cual el punto  $p$  tenga como coordenadas  $(-1, 0)$ .

2. Sean  $P, Q$  y  $R$  tres puntos de  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$  tales que  $\vec{PQ}$  y  $\vec{PR}$  son linealmente independientes.

a) Prueba que los vectores  $\vec{RP}$  y  $\vec{RQ}$  son linealmente independientes.

Considera las referencias cartesianas  $\mathcal{R} = \{P; \vec{PQ}, \vec{PR}\}$  y  $\mathcal{R}' = \{R; \vec{RP}, \vec{RQ}\}$ .

b) Escribe las coordenadas cartesianas de  $P, Q$  y  $R$  respecto a  $\mathcal{R}$ .

c) Escribe las coordenadas cartesianas de  $P, Q$  y  $R$  respecto a  $\mathcal{R}'$ .

d) Halla las ecuaciones de cambio de coordenadas entre las dos referencias.

e) Decide, de manera razonada, si existe algún punto en  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$  con las mismas coordenadas respecto a los dos sistemas de referencia.

3. Determina unas ecuaciones implícitas de las variedades lineales  $L_t = p_t + V$  de  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4$ , donde  $p_t = (1, -2, 3, t)$  y  $V = \mathcal{L}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  con  $\vec{u}_1 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $\vec{u}_2 = (0, 0, 1, 1)$  y  $\vec{u}_3 = (1, 2, -1, 0)$  en un sistema de referencia fijado. ¿Para qué valor de  $t$  la variedad  $L_t$  pasa por el origen?

4. Halla unas ecuaciones implícitas de la variedad lineal  $L$  de  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4$  generada por los puntos  $p_1 = (1, 0, 0, 1)$ ,  $p_2 = (0, 1, 0, 1)$  y  $p_3 = (0, 0, 1, 1)$ , cuyas coordenadas están dadas con respecto a un sistema de referencia fijado. ¿Cuál es la dimensión de  $L$ ?

5. Halla unas ecuaciones implícitas del subespacio afín de  $\mathbb{A}^5$  generado por los puntos  $P_1 = (-1, 2, -1, 0, 4)$ ,  $P_2 = (0, -1, 3, 5, 1)$ ,  $P_3 = (4, -2, 0, 0, -3)$  y  $P_4 = (3, -1, 2, 5, 2)$ .

6. En  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$  y con respecto de una referencia dada  $\mathfrak{R}$ , se dan los puntos  $A = (1, 1)$ ,  $B = (-2, 0)$ , los vectores  $\vec{u}_1 = (1, 2)$  y  $\vec{u}_2 = (-1, 1)$  y la variedad lineal  $L$  de ecuaciones  $x_1 - x_2 = 1$ .

a) Halla las coordenadas de  $B$  respecto al sistema de referencia  $\mathfrak{R}' = \{A; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ .

b) Halla una ecuación implícita de  $L$  con respecto a  $\mathfrak{R}'$ .

7. Sea  $\mathfrak{R}'$  un sistema de referencia en el plano  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$  que se obtiene girando un ángulo  $\alpha$  en sentido positivo los vectores de un sistema de referencia canónico  $\mathfrak{R}$ . Si  $C$  es la circunferencia cuyos puntos  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  satisfacen  $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 4$  en el sistema de referencia  $\mathfrak{R}$ , halla las ecuaciones de  $C$  en el sistema de referencia  $\mathfrak{R}'$ . ¿Cuáles son las coordenadas del centro de la circunferencia respecto de  $\mathfrak{R}'$ ?

8. En  $\mathbb{A}^3$  se consideran las referencias cartesianas:

$$\mathcal{R} = \{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} \text{ y } \mathcal{R}' = \{O', \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}.$$

Sean  $O'_{\mathcal{R}} = (-1, 6, 2)$ ,  $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + \vec{u}_3$ ,  $\vec{v}_2 = -\vec{u}_1$  y  $\vec{v}_3 = 2\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2 + 7\vec{u}_3$ . Si un plano  $\pi$  tiene ecuación  $2x - y + 3z = 0$  en  $\mathcal{R}$ , halla su ecuación respecto a  $\mathcal{R}'$ .

9. En  $\mathbb{A}^2$ , considera los puntos  $P_0, P_1, P_2, Q_0, Q_1$  y  $Q_2$ , cuyas coordenadas cartesianas en el sistema de referencia cartesiano  $\mathcal{R}_C = \{P_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  son las siguientes:

$$\begin{aligned} P_0 &= (0, 0), & P_1 &= (1, 7), & P_2 &= (1, 1) \\ Q_0 &= (-1, 1), & Q_1 &= (1, 4), & Q_2 &= (3, 0) \end{aligned}$$

- Demuestra que los puntos de  $\mathcal{R}' = \{P_0, P_1, P_2\}$  son afinmente independientes. Demuestra que los puntos de  $\mathcal{R}'' = \{Q_0, Q_1, Q_2\}$  son afinmente independientes.
- Halla las coordenadas baricéntricas de  $P_0, P_1$  y  $P_2$  respecto a  $\mathcal{R}''$  y las de  $Q_0, Q_1$  y  $Q_2$  respecto a  $\mathcal{R}'$ .

Considera los sistemas de referencia cartesiana  $\mathcal{R}'_C = \{P_0, P_0\vec{P}_1, P_0\vec{P}_2\}$  y  $\mathcal{R}''_C = \{Q_0, Q_0\vec{Q}_1, Q_0\vec{Q}_2\}$ .

- Calcula las coordenadas cartesianas de  $Q_0, Q_1$  y  $Q_2$  respecto a  $\mathcal{R}'_C$  y las de  $P_0, P_1$  y  $P_2$  respecto a  $\mathcal{R}''_C$ .
- Describe las ecuaciones generales de cambio de coordenadas cartesianas entre  $\mathcal{R}'_C$  y  $\mathcal{R}''_C$ .
- Describe las ecuaciones generales de cambio de coordenadas baricéntricas entre  $\mathcal{R}'$  y  $\mathcal{R}''$ .

10. Sean  $A = (1, 1, 1), B = (1, 2, 3), C = (2, 3, 1)$  y  $D = (3, 1, 2)$  cuatro puntos de  $\mathbb{A}^3$  dados por sus coordenadas cartesianas respecto a un sistema de referencia  $\mathcal{R}$ .

- Demuestra que  $\mathcal{R}' = \{A, B, C, D\}$  es un sistema de referencia baricéntrico.
- Calcula las coordenadas cartesianas respecto a  $\mathcal{R}$  del baricentro de  $A, B, C, D$ .
- Si  $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ , halla las coordenadas baricéntricas de  $O$  respecto a  $\mathcal{R}'$ .

11. Demuestra que en  $\mathbb{A}^2$  los puntos medios de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo.

12. Sean  $O$  un punto y sean  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  dos vectores linealmente independientes. A todo escalar  $\lambda$ , se le asocian los puntos  $A$  y  $B$  tales que

$$\vec{OA} = \lambda\vec{u}, \quad \vec{OB} = \lambda\vec{v}.$$

Determina el baricentro de  $A$  y  $B$  en función de  $\lambda$ .

13. En el espacio afín  $(A, V, \varphi)$  de dimensión  $n$ , sean  $L_1$  y  $L_2$  dos variedades lineales. Demuestra que si la dimensión de  $L_1$  es  $n - 1$  y la dimensión de  $L_2 \geq 1$ , entonces  $L_1$  y  $L_2$  no se pueden cruzar.

14. En el espacio afín  $(A, V, \varphi)$  de dimensión  $n$ , sean  $L_1 = a_1 + V_1$  y  $L_2 = a_2 + V_2$  dos variedades lineales. Demuestra que si  $V = V_1 \oplus V_2$ , entonces  $L_1$  y  $L_2$  se cortan en un punto.