ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 3. Espacio vectorial euclídeo iii (aplicaciones ortogonales)

1. En un espacio vectorial euclideo E de dimensión 3 se considera la base ortonormal $\mathfrak{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y $f : E \longrightarrow E$ una aplicación lineal definida por

$$3f(\vec{u}_1) = 2\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3\,, \quad 3f(\vec{u}_2) = \alpha\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3\,, \quad 3f(\vec{u}_3) = \beta\vec{u}_1 + \gamma\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3\,.$$

Halla α, β y γ para que f sea una aplicación ortogonal.

2. Prueba que las siguientes aplicaciones definidas en $\mathbb{R}^2$

$$\text{a)} \quad A(x,y) = \frac{1}{5}\,(4x+3y\;,\;3x-4y) \qquad \text{b)} \quad A(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-x-y\;,\;x-y)$$

son ortogonales, identifícalas y describe sus subespacios invariantes no triviales.

3. Prueba que la aplicación $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$A(x,y,z) = \frac{1}{3}\,(2x+y-2z\;,\;x+2y+2z\;,\;-2x+2y-z)$$

es una aplicación ortogonal o isometría. Identifica esta aplicación y describe sus subespacios invariantes.

4. Prueba que las aplicaciones $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuyas matrices en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ están dadas por

$$\text{a)} \;\; \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \;\; \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{c)} \;\; \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & -1/2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

son isometrías. Identifica cada una de ellas, indicando sus características principales.

5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal dada por $T(x,y,z) = (y,-z,-x)$. Demuestra que T es una isometría. Halla una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ en la que T tenga como matriz una forma de Jordan real. Identifica la isometría T.

6. Denota por S_L la simetría ortogonal en $\mathbb{R}^3$ con respecto a la recta $L = \mathfrak{L}\{(a,b,c)\}$ y por S_W la reflexión en $\mathbb{R}^3$ con respecto al plano $W = L^{\perp}$.

a) Demuestra que $S_W = -S_L$.

b) Comprueba que la matriz de S_L con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} a^2-b^2-c^2 & 2ab & 2ac \\ 2ab & -a^2+b^2-c^2 & 2bc \\ 2ac & 2bc & -a^2-b^2+c^2 \end{pmatrix}.$$

7. Halla las ecuaciones de la simetría ortogonal en $\mathbb{R}^2$ con respecto a la recta vectorial de ecuación $x+2y=0$.

8. Halla las ecuaciones del giro en $\mathbb{R}^3$ de amplitud $\pi/2$ con respecto al subespacio vectorial generado por el vector de coordenadas $\vec{u}_1 = (0,1,1)$, con la orientación dada por el vector $\vec{u}_1$.

9. Halla las ecuaciones de la simetría ortogonal o reflexión en $\mathbb{R}^3$ respecto al plano vectorial $2x+y+z=0$.