

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 2. ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO II (COMPLEMENTOS Y PROYECCIONES ORTOGONALES, APLICACIONES ADJUNTAS)

1. Calcula el complemento ortogonal del subespacio

$$W = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, 2x_1 - x_2 = 0\},$$

cuando se considera en \mathbb{R}^4 el producto escalar usual.

2. Calcula el complemento ortogonal de la recta $L := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = x_3\}$ respecto al producto escalar habitual y respecto al producto escalar

$$\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$$

3. Calcula la proyección sobre la recta V_1 dada por las ecuaciones $\{x + y + z = 0, x - y = 0\}$ en la dirección del plano vectorial V_2 generado por los vectores $\vec{w}_1 = (1, 0, 1)$ y $\vec{w}_2 = (1, 1, 0)$. Escribe la proyección sobre el plano V_2 en la dirección de la recta V_1 .

4. En \mathbb{R}^4 con el producto escalar usual, determina las ecuaciones de la proyección ortogonal sobre el subespacio vectorial generado por los vectores $(1, 1, -1, 0)$ y $(0, 0, 2, 1)$.

5. En \mathbb{R}^3 , encuentra un producto escalar para el que el complemento ortogonal del plano $\{x = 0\}$ sea la recta $\{x = y, z = 0\}$.

6. En \mathbb{R}^3 , se considera el producto escalar con matriz (en una base $B = \{w_1, w_2, w_3\}$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- i) Calcula una base ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$.
- ii) Calcula la proyección ortogonal sobre el plano $y + z = 0$ del vector con coordenadas $(1, 1, 1)_B$.
- iii) Calcula el subespacio ortogonal al vector de coordenadas $(2, 0, 1)$ respecto a la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.
7. Sea $\mathbb{R}_n[x]$ el espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales en la variable x de grado menor o igual que n . Sean x_0, x_1, \dots, x_n puntos distintos de \mathbb{R} (que fijamos para el resto del ejercicio). Definimos, para $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$,

$$\langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^n p(x_k)q(x_k).$$

- i) Demostrar que el producto así definido es un producto escalar.
- ii) Sea U el subespacio de $\mathbb{R}[x]_n$ formado por los polinomios de grado menor o igual que 1. Dado $p \in \mathbb{R}[x]_n$ demostrar que la proyección ortogonal de p sobre U es

$$P_U(p) = mx + b,$$

con

$$m = \frac{(n+1) \sum x_k y_k - \sum x_k \sum y_k}{(n+1) \sum x_k^2 - (\sum x_k)^2} \quad y \quad b = \frac{\sum x_k^2 \sum y_k - \sum x_k \sum x_k y_k}{(n+1) \sum x_k^2 - (\sum x_k)^2},$$

donde por facilitar la notación, ponemos $y_k = p(x_k)$, y suponemos que los límites de todas las sumas son desde $k = 0$ a $k = n$.

8. Sean E un espacio euclídeo y F_1, F_2 dos subespacios vectoriales de E . Demuestra que

$$(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp \quad y \quad (F_1 \cap F_2)^\perp = F_1^\perp + F_2^\perp.$$

9. Calcula la aplicación adjunta de:

i) $h(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y + 2z, x + 2y + 3z)$, con el producto escalar usual de \mathbb{R}^3 .

ii) La aplicación $h(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)$ con el producto escalar de \mathbb{R}^2 dado por

$$\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$$

10. Diagonalizar en una base ortonormal cada una de las siguientes aplicaciones demostrando en primer lugar que son autoadjuntas:

i) $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $A(x, y) = (2x + y, 2y + x)$.

ii) $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $A(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$.

11. Demuestra que la matriz de la proyección ortogonal $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sobre la recta de ecuación $ax + by = 0$ es

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 1 - \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \quad \beta = \frac{-ab}{a^2 + b^2}.$$

donde en \mathbb{R}^2 se considera la base canónica con el producto escalar usual.

12. Sea T una aplicación lineal de un espacio euclídeo en sí mismo. Demostrar que

$$\ker(T^*) = [\text{Im}(T)]^\perp \quad e \quad \text{Im}(T^*) = [\ker(T)]^\perp.$$