

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 1. ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO I (PRODUCTO ESCALAR)

1. Indica razonadamente cuáles de las siguientes aplicaciones bilineales $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definen un producto escalar en \mathbb{R}^2 :

- i) $\phi(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + 2y_1x_2 - 3x_1y_2 + 2x_2y_2$.
- ii) $\phi(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 - x_2y_2$.
- iii) $\phi(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$.

Encuentra la matriz, en la base canónica, de las aplicaciones bilineales que sean producto escalar.

2. Considera la aplicación $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \rightarrow (2x_1 - 2x_2 + 4x_3)y_1 + (-2x_1 - 2x_3)y_2 + (6x_3 + 4x_1 - 2x_2)y_3.$$

- i) Demuestra que ϕ es una forma bilineal simétrica.
- ii) Decide de manera razonada si ϕ es un producto escalar.
- iii) Calcula el conjunto de los vectores (x, y, z) que cumplen $\phi((x, y, z), (1, -1, -1)) = 0$.
- iv) Determina algún vector (x, y, z) (no nulo) que cumpla que $\phi((x, y, z), (x, y, z)) = 0$.

3. Sea $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineal dada por:

$$\psi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

- i) Decide de manera razonada si ψ es un producto escalar.
- ii) Encuentra una base de \mathbb{R}^3 respecto a la que la matriz de ψ es diagonal.

4. Considera la aplicación $\phi : \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\phi(A, B) = \text{traza}(AB^t)$. Demuestra que ϕ es un producto escalar en $\mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

5. Halla los cosenos de los ángulos entre los vectores no nulos del subespacio vectorial de ecuaciones $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ de \mathbb{R}^n y los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^n , con el producto escalar usual.

6. Sea (E, \langle, \rangle) un espacio euclídeo. Demuestra que:

- i) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$, para todo $\vec{u}, \vec{v} \in E$ (ley del paralelogramo).
- ii) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, para todo $\vec{u}, \vec{v} \in E$ (identidad de polarización).
- iii) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 2 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, para todo $\vec{u}, \vec{v} \in E$.

7. Demuestra la siguiente generalización del teorema de Pitágoras:

$$\|\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_n\|^2 = \|\vec{x}_1\|^2 + \|\vec{x}_2\|^2 + \dots + \|\vec{x}_n\|^2,$$

si los vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in E$ son ortogonales dos a dos.

8. Si \vec{x} e \vec{y} son dos vectores cualesquiera en un espacio euclídeo E , demuestra que

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| \geq \left| \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \right|.$$

9. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Una norma en V es una aplicación $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- $\|\vec{u}\| \geq 0, \forall \vec{u} \in V$ y $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.
- $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|, \forall \vec{u} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$.
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (desigualdad triangular).

Sea $\|\vec{x}\| = |x_1| + |x_2|$ definida en \mathbb{R}^2 . Demuestra que $\|\cdot\|$ es una norma en \mathbb{R}^2 , pero que no proviene de ningún producto escalar porque no satisface la ley del paralelogramo.

10. Dados $\vec{x}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{x}_2 = (4, -2, 0)$ y $\vec{x}_3 = (1, 1, 5)$ en \mathbb{R}^3 construye los vectores \vec{y}_1, \vec{y}_2 e \vec{y}_3 según el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt (con el producto escalar usual).

11. Sea $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$ un producto escalar en \mathbb{R}^3 . Encontrar una base ortogonal del subespacio vectorial $M \subset \mathbb{R}^3$ para:

- $M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = x_3\}$;
- $M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$.

12. Dada la base $B' = \{u_1 = (-2, -1, 1), u_2 = (0, -1, 0), u_3 = (1, -1, 0)\}$ de \mathbb{R}^3 ,

- Demuestra que existe un producto escalar ϕ respecto al cual B' es una base ortogonal. Decide de manera razonada si ϕ es único con esta propiedad.
- Demuestra que existe un producto escalar ψ respecto al cual B' es una base ortonormal. Decide de manera razonada si ψ es único con esta propiedad. Describe la matriz de ψ respecto a la base canónica de \mathbb{R}^3 .

13. Dado un número natural n , definimos $V_n = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \text{grado}(p(x)) \leq n\}$. En $V_n \times V_n$, se define la aplicación ϕ :

$$\phi(p(x), q(x)) = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt.$$

- Demuestra que ϕ es un producto escalar.
- Describe el subespacio de polinomios ortogonales al polinomio x .
- Calcula una base ortogonal de V_3 .

14. Decide, de forma razonada, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- En el espacio vectorial (real) euclídeo E , los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son ortogonales si y sólo si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.
- En un espacio vectorial (real) euclídeo X se cumple la igualdad

$$\|\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + \|\vec{z}\|^2 + 2(\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{z}, \vec{x} \rangle),$$

para todos los vectores $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in X$.

- En el espacio vectorial \mathbb{R}^3 , podemos encontrar dos vectores \vec{x}, \vec{y} y un producto escalar Φ tales que $\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = 1$ y $\Phi(\vec{y}, \vec{y}) = \Phi(\vec{x}, \vec{y}) = 2$.